Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 4 pages.

EXTRAITS DE CONCOURS : E3A

♦ Exercice 1 (MP 2021)

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)dt$.

1. Démontrer que $\mathscr{B} = \big(1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur φ.**
   (a) Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.
3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)dt.$$
   (a) Justifier que l'application ψ est linéaire.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^{n+1}\right)$.
   (c) Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}\left(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)\right)$.
   (d) Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. On note $\mathscr{H} = \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}\right)$.
   (a) Donner la dimension de $\mathscr{H}$.
   (b) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$. Démontrer que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathscr{H}$.
   (c) Déterminer les composantes de φ dans cette base.

♦ Exercice 2 (MP 2020)

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E. On définit les applications S et T de $\mathscr{C}$ dans E par :
$$\forall x \in \mathscr{C},\ S(x) = z, \text{ avec } \forall n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$
et
$$\forall x \in \mathscr{C},\ T(x) = y, \text{ avec } \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}.$$

0. **Questions de cours.** *On répondra sans démonstration.*
   (a) On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes $aX^2 + bX + c$ dont on note s_1 et s_2 les racines. Donner les expressions de $\sigma_1 = s_1 + s_2$ et de $\sigma_2 = s_1 s_2$ à l'aide des coefficients a, b et c.
   (b) Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}, u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$
   On note r_1 et r_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique associée à cette suite. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de r_1, r_2 et n. On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de u_0 et de u_1.

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.
3. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, elle est bornée.
4. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même de S.
5. Soient $F = \{x \in \mathscr{C} \mid \forall n \in \mathbb{Z},\, x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathscr{C} \mid \forall n \in \mathbb{Z},\, x_n = -x_{-n}\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}$.
6. **Étude de l'endomorphisme S.** Prouver que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.
7. **Étude de l'endomorphisme T.**
   (a) Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}, \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}$ où $0_{\mathscr{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathscr{C}$. On pourra utiliser les questions de cours.
   (b) L'endomorphisme T est-il injectif ?
   (c) Déterminer $\operatorname{Ker}(T - 2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $\operatorname{Ker}(T + 2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.

⧫ Exercice 4 (PC 2022)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t\,.$$
Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série $\sum u_n$.

1. (a) Vérifier que la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante.
   (b) En admettant que la suite $(|u_n|)_n$ tend vers 0, montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. (a) Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
   (b) En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t$
3. (a) Pour $n \geq 0$, déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.
   (b) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Qu'en déduire quand à la série $\sum u_n$?
4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n : t \mapsto (-1)^n \cos^n(t)$.
   (a) Démontrer que la série $\sum v_n(t)$ est absolument convergente pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   (b) En admettant que
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t$$
   déterminer la somme de la série $\sum u_n$.

⧫ Exercice 5 (MP 2022)

1. **Questions de cours**
   (a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.
   Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression :
   $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m$.
   (c) Soit n un entier non nul. Donner, sans démonstration, l'espérance d' une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

* * * * **

Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.
3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}(X_n \leq j)$ et prouver que l'on a $\mathbb{P}(X_n = j) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

On appellera **espérance** d'une variable aléatoire X la quantité :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)\,.$$

4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :
$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}(X_n > j)$$
5. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.
6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

⧫ Exercice 6 (PC 2019)

1. Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_p = \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}\,.$$
   Vérifier que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.
   (b) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait :
   $$\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1\,.$$

On note alors $a_n = n+p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété. Ceci entraîne en particulier que :
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1\,.$$

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
4. Prouver pour $n \geq 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1$$

et

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1\,.$$

5. Montrer que si la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2, 3]$.
6. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}\,.$$

7. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1\,.$$

8. En déduire que la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.