

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

– I –

1. (a) Une application linéaire est totalement déterminée par l'image d'une base de son espace de départ. De plus, on a $e_1 \in \ker(f) \setminus \{0\}$ donc f n'est pas injectif.
 (b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f^2(e_k) = 0$ donc f^2 est nul par linéarité.
2. Notons que les trois conditions sont équivalentes car on considère des endomorphismes en dimension finie.

Si on suppose $f \in GL(E)$ nilpotent, il existe $n \geq 1$ tel que $f^n = 0$. En composant par $(f^{-1})^{n-1}$ à gauche (ou à droite selon les goûts), on obtient $f = 0$, ce qui est absurde.

3. (a) Posons

$$\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid f^k = 0\}.$$

\mathcal{E} est une partie de \mathbb{N} non vide car f est nilpotent. Elle admet donc un plus petit élément.

- (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

— Si $p = \text{ind}(f)$, alors $f^p = 0$ et $p - 1 \notin \mathcal{E}$ par minimalité, d'où $f^{p-1} \neq 0$.

— Si $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$, alors $p \in \mathcal{E}$ et $p - 1 \notin \mathcal{E}$. Si on suppose qu'il existe $k < p$ dans \mathcal{E} alors on a $f^{p-1} = f^k \circ f^{p-1-k} = 0$, ce qui est absurde. De fait, on a bien $p = \min \mathcal{E}$.

4. (a) Soit $h \in \{f, g\}$; si on pose $p = \text{ind}(h)$, on a $(f \circ g)^p = f^p \circ g^p = 0$ et donc $f \circ g$ est nilpotente et par minimalité $p \geq \text{ind}(f \circ g)$. On a donc bien le résultat voulu.
 (b) Posons $N = \text{ind}(f) + \text{ind}(g)$. Alors, comme f et λg commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)^N &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} f^k \lambda^{N-k} g^{N-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\text{ind}(f)} \binom{N}{k} f^k \lambda^{N-k} \underbrace{g^{N-k}}_{=0} + \sum_{k=\text{ind}(f)+1}^N \binom{N}{k} \underbrace{f^k}_{=0} \lambda^{N-k} g^{N-k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car si $k \leq \mathbb{1}(f)$, on a $N - k \geq \text{ind}(g)$. On a donc bien la nilpotence de $f + \lambda g$ avec $\text{ind}(f + \lambda g) \leq \text{ind}(f) + \text{ind}(g)$.

5. Comme $f^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur $x \notin \ker(f^{p-1})$. Supposons alors trouvés $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x) = 0$. Alors, en composant par u^{p-1} à gauche cette égalité, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^{k+p-1}(x) = f^{p-1}(0)$$

soit, comme $f^p = 0$ (et donc $f^j = 0$ pour tout $j \geq p$) :

$$\lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0.$$

Comme $f^{p-1}(x) \neq 0$, on a que $\lambda_{p-1} = 0$. En itérant ce procédé (on compose l'égalité initiale par $f^{p-2}, f^{p-3}, \dots, f$ en éliminant successivement les λ_k par ordre décroissant), on obtient que les λ_k sont tous nuls, et donc que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

Le cardinal d'une famille libre étant toujours inférieur à la dimension de l'espace auquel ses vecteurs appartiennent, on a que $n = \dim(E) \geq p$.

(a) – II –

1. Fixons $k \in \mathbb{N}$.

- (a) Soit $k \in \mathbb{N}$; alors si $x \in \ker(u^k)$ on a $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$ donc $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$.
 (b) Si $y \in \text{Im}(u^{k+1})$ alors il existe un $x \in E$ tel que $y = u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) \in \text{Im}(u^k)$ donc $\text{Im}(u^k) \supset \text{Im}(u^{k+1})$.

2. (a) Fixons un tel entier p . Alors, si $k > p$, on a $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k-1})$ par la question précédente. De plus, pour tout $x \in \ker(u^k)$ on a :

$$0 = u^k(x) = u^{p+1}(u^{k-p-1}(x))$$

donc $u^{k-p-1}(x) \in \ker(u^{p+1}) = \ker(u^p)$. Ainsi :

$$0 = u^p(u^{k-p-1}(x)) = u^{k-1}(x)$$

et donc $x \in \ker(u^{k-1})$. *In fine*, on a bien $\ker(u^k) = \ker(u^{k-1})$ et donc par récurrence :

$$\forall k \geq p, \quad \ker(u^k) = \ker(u^p).$$

- (b) D'après la question 1.(a), la suite des $(d_k)_k$ est une suite croissante bornée par n : elle est donc convergente. Comme il s'agit d'une suite d'entiers, c'est un exercice classique de montrer qu'elle est stationnaire : il existe donc un entier p tel que $\forall k \geq p$, $\dim(\ker(u^k)) = \dim(\ker(u^p))$. Or $\ker(u^p) \subset \ker(u^{p+1})$ donc par égalité dimensionnelle ($d_p = d_{p+1}$) et inclusion on a :

$$\ker(u^{p+1}) = \ker(u^p).$$

3. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a par théorème du rang $\text{rg}(u^k) = n - d_k$, d'où le résultat.
 (b) On a rapidement par récurrence que

$$\forall k \geq p, \quad \text{Im}(u^k) \subset \text{Im}(u^p)$$

et donc on peut conclure par égalité dimensionnelle et inclusion.

4. (a) Soit $x \in \ker(u^p) \cap \text{Im}(u^p)$. Alors il existe $a \in E$ tel que $x = u^p(a)$. De fait :

$$u^{2p}(a) = u^p(u^p(a)) = u^p(x) = 0.$$

- (b) On a $a \in \ker(u^{2p}) = \ker(u^p)$ car $p \leq 2p$; ainsi $x = u^p(a) = 0$. Ainsi, $\ker(u^p)$ et $\text{Im}(u^p)$ sont en somme directe. De plus, par formule du rang on a $n = \text{rg}(u^p) + d_p$, d'où $E = \ker(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$.

– III –

1. Comme $u^p = u^{p+1} = 0$ on a bien $\ker(u^p) = E = \ker(u^{p+1})$.
 2. Par théorème du rang, $\dim(\text{Im}(u)) = n - \dim \ker(u) = n - 1$.
 3. (a) On a $\dim \ker(u^0) = \dim \ker(\text{id}_E) = 0$ et $\dim \ker(u) = 1$ par hypothèse.
 (b) i. Soit $y \in E$; alors :

$$\begin{aligned} y \in \text{Im}(v) &\iff \exists x \in \ker(u^{k+1}), y = u(x) \\ &\iff y \in \text{Im}(u) \text{ et } u^k(y) = u^{k+1}(x) = 0 \\ &\iff y \in \text{Im}(u) \cap \ker(u^k). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in E$ on a :

$$\begin{aligned} x \in \ker(v) &\iff x \in \ker(u^{k+1}) \text{ et } u(x) = 0 \\ &\iff x \in \ker(u) \cap \ker(u^{k+1}) = \ker(u). \end{aligned}$$

ii. Par théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim \ker(u^{k+1}) &= \operatorname{rg}(v) + \dim \ker(v) \\ &= \dim \operatorname{Im}(u) \cap \ker(u^{k+1}) + \dim \ker(u).\end{aligned}$$

Or, par inclusion et hypothèse de récurrence, $\dim \operatorname{Im}(u) \cap \ker(u^k) \leq \dim \ker(u^k) = k$
ergo :

$$\dim \ker(u^{k+1}) \leq k + \dim \ker(u) = k + 1.$$

iii. Supposons par l'absurde que $\dim(\ker(u^{k+1})) = k$. Alors, par hypothèse de récurrence, $\dim(\ker(u^k)) = \dim(\ker(u^{k+1}))$ et donc, comme $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$ on a $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$.

D'après le résultat de la partie II, on a donc pour tout $j \geq k$, $\ker(u^k) = \ker(u^j)$; en particulier $\ker(u^k) = \ker(u^n)$. Mais d'après la partie I, $p \leq$ donc $u^n = 0$ et donc $\ker(u^k) = E$ et donc $k = \dim(E) = n$, ce qui est absurde.

En conclusion $\dim(\ker(u^{k+1}))$ est un entier de l'intervalle $]k, k + 1]$: il s'agit nécessairement de $k + 1$. On a donc achevé notre démonstration par récurrence !

4. D'après ce qui précède, $\ker(u^{n-1})$ est de dimension $n - 1$ donc différent de E ; ainsi $u^{n-1} \neq 0$. De fait, $n - 1 < p \leq n$, ce qui entraîne que $p = n$.
5. L'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ donnée par :

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

convient.