Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 2 pages.

Ce devoir est à rendre pour le lundi 28 avril 2025.

Endomorphismes nilpotents

On fixe un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un $\mathbb{K}$–e.v E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que, si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout $k \geq 1$, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Définition 1.

*Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit **nilpotent** si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.*

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des endomorphismes nilpotents. La partie II est dédiée à la démonstration de résultats techniques dont on fera usage dans la partie III.

– I –

1. On suppose $n \geq 2$ et on fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On définit $f \in \mathscr{L}(E)$ de la façon suivante : pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $f(e_i) = 0$ et $f(e_n) = e_1$.
   (a) Justifier que ce procédé définit bien un endomorphisme de E. Est–il bijectif ?
   (b) Démontrer que f est nilpotent.
2. Une application nilpotente peut–elle être bijective ? Injective ? Surjective ?
3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.
   (a) Démontrer que la quantité suivante (appelée *indice de nilpotence de f*) est bien définie :
   $$\mathrm{ind}(f) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^k = 0\} .$$
   (b) Montrer que si $f \neq 0$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
   $$p = \mathrm{ind}(f) \Leftrightarrow (f^{p-1} \neq 0 \text{ et } f^p = 0) .$$
4. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes nilpotents tels que $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Montrer que $f \circ g$ est nilpotent et que $\mathrm{ind}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{ind}(f), \mathrm{ind}(g))$.
   (b) Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$, $f + \lambda g$ est nilpotent et $\mathrm{ind}(f + \lambda g) \leq \mathrm{ind}(f) + \mathrm{ind}(g)$.
5. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent et soit $p = \mathrm{ind}(f)$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \notin \ker(f^{p-1})$, la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
   (b) En déduire que $p \leq n$.

– II –

Dans cette partie, on fixe $u \in \mathscr{L}(E)$ **non nécessairement nilpotent.**

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a les inclusions :
   (a) $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$;
   (b) $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$.
2. (a) Montrer que si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$, alors
   $$\forall k \geq p, \quad \ker(u^k) = \ker(u^p) .$$

(b) En considérant la suite $(d_k)_k$, où $d_k = \dim(\ker(u^k))$ pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer qu'il existe un tel entier p.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose fixé un tel entier p.

3. (a) Démontrer que la suite $(\mathrm{rg}(u^k))_k$ est stationnaire à partir du rang p.
   (b) En déduire que
$$\forall k \geq p, \quad \mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^p)\ .$$
4. (a) Soit $x \in \ker(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p)$. Vérifier qu'il existe $a \in E$ tel que $x = u^p(a)$ et $u^{2p}(a) = 0$.
   (b) En déduire que $x = 0$ et que $E = \ker(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

– III –

Dans cette partie, on fixe $u \in \mathscr{L}(E)$ **nilpotent**.

1. Montrer que $p = \mathrm{ind}(u)$ vérifie les hypothèses de la question II.2.(a).

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $\ker(u)$ ***est une droite vectorielle de E.***

2. Justifier que $\mathrm{Im}(u)$ est un hyperplan de E.
3. Le but de cette question est démontrer par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ la propriété suivante :
$$H(k) \ : \quad \dim(\ker(u^k)) = k\ .$$
   (a) Justifier que $H(0)$ et $H(1)$ sont vérifiées.
   (b) Fixons $k \in [\![0, n-1]\!]$ et supposons la propriété $H(k)$ vérifiée. On note $v : \ker(u^{k+1}) \to E$ la restriction de u à $\ker(u^{k+1})$.
      i. Démontrer que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u) \cap \ker(u^k)$ et $\ker(v) = \ker(u)$.
      ii. En déduire que
$$k \leq \dim(\ker(u^{k+1})) \leq k+1\ .$$
      iii. Démontrer par l'absurde que $\dim(\ker(u^{k+1}))$ ne peut être égal à k. Conclure
4. En déduire que $p = n$.
5. Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ vérifiant les conditions de cette partie.