

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

ADAPTÉ DE CENTRALE PC 2016

– I –

1. Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a bien :

$$\tau(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(X + 1) = P(X + 1) + \lambda Q(X + 1) = \tau(P) + \lambda \tau(Q).$$

2. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$).

Alors, $\tau(P)$ est de la forme :

$$P(X + 1) = \sum_{k=0}^d a_k (X + 1)^k = a_d X^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P).$$

3. Notons que $\tau^0(P) = P$ et que si $\tau^k(P)(X) = P(X + k)$, alors

$$\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X + k) + 1) = P(X + (k + 1)).$$

Ainsi, par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \tau(P)(X) = P(X + k)$$

4. D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable $i = h + 1$),

$$\forall j \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, \tau(P_j)(X) = (X + 1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} P_i$$

5. Si on considère $\bar{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X - 1)$,

on montre qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie : $\tau \circ \bar{\tau} = \bar{\tau} \circ \tau = \text{id}$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau(\bar{\tau}(P))(X) = \bar{\tau}(P)(X + 1) = P(X) = \tau(\bar{\tau}(P))(X).$$

Donc τ est bijectif et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X], \tau^{-1}(P)(X) = P(X - 1)$. Puis, comme pour la question 3, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}, \tau^{-k}(P)(X) = P(X - k)$.

Donc la formule est toujours vraie :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \tau(P)(X) = P(X + k).$$

6. La $k + 1^{\text{e}}$ ligne du calcul $V = Q \times U$ est justement

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j$$

On peut identifier (après changement d'indice) : $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

7. On a alors

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda + 1)^k$$

On vérifie bien :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda + 1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda + 1) - 1)^k = u_k$$

– II –

1. Avec les mêmes notations qu'en I.2, avec P non constant on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = da_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$, si P est non constant, $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$ et $\text{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \text{cd}(P)$.

2. D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(\delta(P)) \geq 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.

Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.

Donc

$$\text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X].$$

3. Si $\text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$, avec $j < n$.

$$P \in \text{Ker}(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \iff \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Donc

$$P \in \text{Ker}(\delta^{j+1}) \iff \deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1 \leq (j-1) + 1 = j \iff P \in \mathbb{R}_j[X]$$

Ainsi, par récurrence :

$$\forall j \in [1, n], \text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Si $P \in \text{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.

Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leq n - j$.

Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\text{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

4. Comme τ commute avec $\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, alors d'après la formule de Newton :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \delta^k = (\tau - \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j.$$

5. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Ker}(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0 = \delta^n(P) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

Et en particulier en évaluant en $X = 0$:

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0.$$

– III –

1. (a) Si φ est une surjection de E sur F , alors nécessairement $|F| \leq |E|$. Donc si $n > p$, alors $S(p, n) = 0$.

- (b) Une surjection d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection. Donc

$$S(n, n) = n!$$

- (c) Les surjections de $[1, n+1]$ sur $[1, n]$ sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

— Le choix de deux éléments de $[1, n+1]$ qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités

— Puis, la distribution des n éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les n éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) : $n!$ possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$S(n+1, n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

2. (a) Une application de $E = \mathbb{N}_p$ sur un ensemble $F = [1, n]$ est parfaitement définie -et de manière unique- par la donnée pour chacun des p éléments de E d'un unique élément de F . Donc pour chacun des p éléments de E , il y a n possibilités.

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit : le nombre d'applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ sur $[1, n]$ est donc $n \times n \cdots \times n = n^p$.

- (b) Notons $I_k = \{\varphi : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow [1, n] \mid |\varphi(\mathbb{N}_p)| = k\}$. Alors, d'après la question précédente :

$$n^p = \sum_{k=1}^n |I_k|.$$

Il reste à dénombrer I_k . Or les applications φ de I_k sont parfaitement déterminées par :

- Le choix de k éléments de \mathbb{N}_n qui forment $\varphi(\mathbb{N}_p)$: $\binom{n}{k}$ possibilités ;
- Puis, le choix des surjections de \mathbb{N}_p sur l'ensemble $\varphi(\mathbb{N}_p)$ à k éléments : $S(p, k)$ possibilités .

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(p, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k)$$

avec la convention $S(p, 0) = 0$.

- (c) On applique alors la formule d'inversion trouvée en I, (avec p constant)

$$v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

avec $v_n = n^p$, $u_k = S(p, k)$, donc

$$\forall p \geq n, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

- (d) Pour $p < n$, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après II.5,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p, n)$$

On peut donc généraliser, de manière cohérente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\forall p \in \mathbb{N}, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

3. Avec les questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n, n) = n! \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1, n) = \frac{n \times (n+1)!}{2}.$$