Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 2 pages.

Adapté de Centrale PC 2016

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(P)$désigne le coefficient dominant de P.

On rappelle que, si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout $k \geq 1$, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$. Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

– I –

On définit l'**opérateur de translation** τ par :

$$\tau \,:\, \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

1. Justifier que τ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.
4. Exprimer, pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, le polynôme $\tau(P_k)$ en fonction de $P_1, \ldots, P_{n+1}$.
5. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^k trouvée à la question 3 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $k \in \mathbb{Z}$?
6. On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$
$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{1}$$
Déterminer une matrice $Q \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que
$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

On admettra dans toute la suite la **formule d'inversion** suivate : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{2}$$

7. On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

– II –

On appelle **opérateur de différence** l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\delta = \tau - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, *i.e* :

$$\begin{array}{rccl} \delta : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
2. En déduire le noyau $\mathrm{Ker}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.
3. Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les relations suivantes :

$$\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{3}$$

4. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{4}$$

– III –

On donne dans cette partie une application combinatoire des résultats obtenus en I et II. Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. On pose $S(p, 0) = 0$.

1. (a) Que vaut $S(p, n)$ pour $p < n$?
   (b) Déterminer $S(n, n)$.
   (c) Déterminer $S(n + 1, n)$.
2. (a) Combien y a-t-il d'applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
   (b) Pour $p \geq n$, établir la formule

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p, k) \tag{5}$$

   où $S(p, 0) = 0$ par convention.
   (c) En déduire une expression de $S(p, n)$ pour $p \geq n$.
   (d) Commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.
3. Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} .$$