Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 2 pages.

Endomorphismes cycliques

Dans tout ce problème, on fixe un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un $\mathbb{K}$–e.v E. On rappelle que, si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout $k \geq 1$, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k\ fois}$.

Définition 1.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$; on dit qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est ***cyclique d'ordre*** *p si il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que :*

(i) $f^p(x_0) = x_0$;

(ii) *la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0) \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E ;*

(iii) *pour tous $i, j \in [\![0, p-1]\!]$ tels que $i \neq j$, on a $f^i(x_0) \neq f^j(x_0)$.*

La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée un ***cycle de*** *f.*

– I –

1. On considère dans cette question l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^4 &\to \mathbb{K}^4 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (t, x, y, z) . \end{aligned}$$

   (a) Démontrer que $f \in GL(\mathbb{K}^4)$.

   (b) On pose $x_0 = (1, 0, 0, 0)$. Justifier que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0))$ est une base de $\mathbb{K}^4$.

   (c) Montrer que f est cyclique et que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0))$ est un cycle de f.

2. On se place désormais dans le cas où E admet une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit une application $g \in \mathscr{L}(E)$ en posant, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $g(e_k) = e_{k+1}$ et $g(e_n) = e_1$.

   (a) Justifier que ce procédé définit bien un endomorphisme linéaire de E. Est–il bijectif ?

   (b) Soit $x \in E$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. Vérifier que

$$g(x) = x_n e_1 + \sum_{k=1}^{n-1} x_k e_{k+1} .$$

   En déduire que $g^n = \mathrm{id}_E$.

   (c) Montrer que $(e_1, g(e_1), \ldots, g^{n-1}(e_1))$ est une base de E.

   (d) Démontrer que g est cyclique et que $(e_1, g(e_1), \ldots, g^{n-1}(e_1))$ est un cycle de g.

– II –

Dans cette partie, on suppose que E admet une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme cyclique d'ordre $p \in [\![1, n]\!]$ de E et $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

1. (a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{p+k}(x_0) = f^k(x_0)$.
   (b) Montrer que $f^p = \mathrm{id}_E$.
   (c) En déduire que $f \in GL(E)$.
2. (a) Démontrer que l'entier $m = \max\{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est une famille libre}\}$ est bien défini et inférieur ou égal à p.
   (b) Montrer **avec soin** que si $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E et $e \in E$ tel que $(f_1, \ldots, f_n, e)$ soit liée, alors $e \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier k supérieur ou égal à m,
   $$\mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^k(x_0)\,) = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\,)\ .$$
   (d) En déduire que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est une base de E.
3. (a) Justifier qu'il existe une unique famille $(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que
   $$f^m(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i f^i(x_0)\ .$$
   On considère l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ défini par $g = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} a_i f^i$.
   (b) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g \circ f^k(x_0) = f^{m+k}(x_0)$.
   (c) En déduire que $f^m = g$.