Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

Projecteurs

1. (a) Si $(x,y,z) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{D}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$; la condition $x+y+z=0$ entraîne immédiatement que (x,y,z) est le vecteur nul. On a donc $\mathscr{P} \cap \mathscr{D} = \{0\}$.
   On remarque ensuite que $(1,-1,0)$ et $(0,-1,0)$ sont deux vecteurs (non colinéaires) de $\mathscr{P}$, et que si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a la décomposition :
   $$(x,y,z) = \underbrace{\left(\frac{5x-y-z}{6}\right) \cdot (1,-1,0) + \left(\frac{-x-y+z}{2}\right) \cdot (0,-1,1)}_{\in \mathscr{P}} + \underbrace{\left(\frac{x+y+y}{6}\right) \cdot (1,2,3)}_{\in \mathscr{D}}$$
   et donc $\mathbb{R}^3 \subset \mathscr{P} + \mathscr{D}$. *In fine*, on a bien $\mathbb{R}^3 = \mathscr{P} \oplus \mathscr{D}$.

   (b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; alors d'après ce qui précède, l'image recherchée est la "composante selon $\mathscr{P}$ de la décomposition *supra*, soit :
   $$\left(\frac{5x-y-z}{6}\right) \cdot (1,-1,0) + \left(\frac{-x-y+z}{2}\right) \cdot (0,-1,1)\,.$$

2. (a) — Si $p+q$ est un projecteur, alors $(p+q)^2 = p+q$, soit :
   $$p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$$
   et donc, comme $p^2 = p$ et $q^2 = q$, on $p \circ q = -q \circ p$. Or :
   $$p \circ q = p \circ p \circ q = p \circ (-q \circ p) = -(p \circ q) \circ p = (q \circ p) \circ p = q \circ p$$
   donc $p \circ q = q \circ p = 0$.

   — Réciproquement, si $p \circ q = q \circ p = 0$ alors
   $$(p+q)^2 = p^2 + q^2 = p + q$$
   donc $p+q$ est un projecteur.

   (b) Cela signifie que $\mathrm{Im}(q) \subset \ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p) \subset \ker(q)$ par un exercice classique.

3. Comme g est un projecteur, on a $E = \ker(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$. Soit $x \in E$, que l'on peut donc écrire sous la forme $x = u + v$ avec $u \in \ker(g)$ et $v \in \mathrm{Im}(g)$ s'écrivant lui–même sous la forme $v = g(t)$ avec $t \in E$. Alors :
   $$\begin{aligned} x \in \ker(f \circ g) &\iff f(g(x)) = 0 \\ &\iff f(g(u) + g^2(t)) = 0 \\ &\iff f \circ g(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in \ker(f)\,. \end{aligned}$$
   Ainsi, x se décompose sous la forme $x = u + v$ avec $u \in \ker(g)$ et $v \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(g)$. De plus $\ker(g) \cap (\ker(f) \cap \mathrm{Im}(g))$ *subset* $\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ et donc la somme est directe, ce qui permet de conclure.