Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 1 page.

Ce devoir est à rendre pour le lundi 17 mars 2025.

Projecteurs

1. Soit $\mathscr{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{D}$ la droite engendrée par $(1,2,3)$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathscr{P} \oplus \mathscr{D}$.
   (b) Déterminer l'image d'un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par le projecteur sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soient $p, q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs.
   (a) Démontrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
   (b) Interpréter la condition ci–dessus au moyen des noyaux et images de p et q.
3. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que g soit un projecteur. Démontrer que

$$\ker(f \circ g) = \ker(g) \oplus (\ker(f) \cap \operatorname{Im}(g)) \ .$$