Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

Formule de Stirling

– I –

1. (a) Un calcul rapide donne $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.

   (b) Soit $n \geq 0$; alors on a :

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)^n \mathrm{d}u \text{ via } u = \frac{\pi}{2} - x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)^n \mathrm{d}u\,. \end{aligned}$$

2. (a) Pour $n \geq 0$ on a :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n (\cos(x) - 1)\,\mathrm{d}x \leq 0$$

   par positivité de l'intégrale, d'où le résultat.

   (b) Comme $\cos \geq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on a par positivité de l'intégrale que $W_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$. La suite $(W_n)_n$ converge donc car elle est décroissante et minorée.

3. (a) Soit $n \geq 0$; alors on a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= [\sin(x)\cos(x)^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times (n+1)\sin(x)\cos(x)^n\,\mathrm{d}x \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2\cos(x)^n\,\mathrm{d}x \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(x))^2\cos(x)^n\,\mathrm{d}x \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

   et donc $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

   (b) Démontrons par récurence sur $p \geq 0$ que :

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\,.$$

   — En $p = 0$, il s'agit de la question 1.(a).

— Si on suppose la propriété vérifiée au rang $p \geq 0$ alors :

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} &= \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+1)!}{2(p+1)2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2p+2}{2p+2} \frac{(2p+1)!}{2(p+1)2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

d'où le résultat pour W_{2p+2}. On procède similairement pour $W_{2p+3} = W_{2(p+1)+1}$.

(c) Soit $n \geq 0$; alors si n est pair, $n+1$ est impair et inversement. De fait, il existe un entier $p \geq 0$ tel que $W_n W_{n+1} \in \{W_{2p}W_{2p+1}, W_{2p-1}W_{2p}\}$. La suite est un calcul direct à partir de la question précédente.

4. (a) Comme la suite $(W_n)_n$ est décroissante et strictement positive, on a pour $n \geq 0$ que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ et que

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} \ .$$

(b) Par encadrement, la question précédente nous donne que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$, d'où le résultat.

(c) La suite $(2^n)_n$ convient.

5. (a) $W_n W_{n+1} \sim W_n^2$ donc $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2(n+1)} \sim \dfrac{\pi}{2n}$ d'après 3.(c). De fait, par puissance d'équivalent et positivité de $(W_n)_n$, $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

(b) Par équivalent, $W_n \to 0$.

– II –

1. (a) Soit $n \geq 2$; alors

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln\left(\frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\frac{e^{n-1}(n-1)!}{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}\right) \\
&= \ln\left(e\sqrt{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\right) \\
&= \ln(e) + \ln\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ .
\end{aligned}$$

(b) Au voisinage de l'infini on a :

$$\begin{aligned}
v_n &= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \ .
\end{aligned}$$

(c) $n^2 v_n \sim \dfrac{-1}{12}$ donc la suite $(n^2 v_n)_n$ est bornée car convergente. De fait, $v_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. (a) Pour $n \geq 2$, on a $v_n = V_n - V_{n-1} \to 0$ car $(V_n)_n$ converge. De plus, on vérifie par télescopage que, pour tout $n \geq 1$:

$$V_n = \ln(u_n) - \ln(u_1) = \ln(u_n)$$

et donc $(u_n)_n = (e^{V_n})_n$ converge par composée de limites.

(b) En posant $\kappa = \lim u_n$ on a $\kappa = \exp(\lim V_n)$ donc $\kappa > 0$. Comme κ est un réel non nul, $u_n \sim \kappa$, soit :

$$\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \sim \kappa$$

ergo

$$n! \sim \kappa \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\,.$$

3. (a) Par I.3.(b), on a, pour $p \geq 0$:

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

et donc, d'après la question précédente :

$$W_{2p} \sim \kappa \frac{2^{2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}e^{2p}} \left(\kappa \left(\frac{p}{e}\right)^p \sqrt{p}\right)^{-2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\kappa\sqrt{2p}}\,.$$

(b) On sait que $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$ par I.3.c ; ainsi, par quotient :

$$1 = \frac{W_{2p}}{W_{2p}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\kappa}$$

et donc $\kappa = \sqrt{2\pi}$ par unicité de la limite.