Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 2 pages.

Formule de Stirling

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème suivant, du à Abraham de Moivre et James Stirling.

Théorème 1.

On a l'équivalent suivant lorsque n tend vers l'infini :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ .$$

– I –

Dans toute la suite et pour $n \geq 0$, on appelle n–ième ***intégrale de Wallis*** *la quantité*

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \mathrm{d}x\ .$$

1. (a) Calculer W_0 et W_1.

   (b) Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que pour tout $n \geq 0$ on a

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \mathrm{d}x\ .$$

2. On rappelle que si f est une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$ on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0\ .$$

   (a) Vérifier que la suite $(W_n)_n$ est décroissante.

   (b) Démontrer que la suite $(W_n)_n$ converge vers un élément de $\mathbb{R}_+$.

3. (a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \geq 0, \quad W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n\ .$$

   (b) En déduire que, pour tout $p \geq 0$:

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\ .$$

   (c) Montrer que, pour tout $n \geq 0$:

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}\ .$$

4. (a) Démontrer que pour tout $n \geq 0$ on a :

$$1 - \frac{1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1\ .$$

(b) En déduire que $W_n \sim W_{n+1}$.

(c) Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_n$ telle que $u_n \not\sim u_{n+1}$.

5. (a) Démontrer que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

(b) En déduire la limite éventuelle de la suite $(W_n)_n$.

– II –

On considère dans cette partie les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies comme suit :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2,\ v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})\ .$$

1. (a) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$v_n = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ .$$

(b) En déduire un développement asymptotique à l'ordre $\dfrac{1}{n^2}$ de v_n lorsque $n \to \infty$.

(c) Justifier que $v_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. *On admettra que la suite de terme général $V_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} v_n$ est convergente.*

(a) Montrer que les suites $(v_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent.

(b) En déduire qu'il existe un nombre réel κ tel que :

$$n! \sim \kappa \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\ .$$

3. (a) Démontrer en utilisant l'équivalent ci–dessus que $W_{2p} \sim \dfrac{\pi}{\kappa\sqrt{2p}}$ lorsque $p \to \infty$.

(b) En comparant cet équivalent à celui obtenu en fin de partie I, en déduire que $\kappa = \sqrt{2\pi}$.