Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

Nombres de Fubini

Extrait de Centrale TSI 2024.

1. Par définition, $F_1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k} F_0 = \binom{1}{0} F_0$; soit $F_1 = 1$,

$$F_2 = \sum_{k=0}^{1} \binom{2}{k} F_k = \binom{2}{0} F_0 + \binom{2}{1} F_1 = 3 \quad \text{et} \quad F_3 = \sum_{k=0}^{2} \binom{3}{k} F_k = \binom{3}{0} F_0 + \binom{3}{1} F_1 + \binom{3}{2} F_2 = 13$$

2. Les partitions ordonnées de $\{1, 2, 3\}$ sont :

$$(\{1\},\{2\},\{3\}),(\{1\},\{3\},\{2\}),(\{2\},\{1\},\{3\}),(\{2\},\{3\},\{1\}),(\{3\},\{1\},\{2\}),(\{3\},\{2\},\{1\})$$
$$(\{1\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{1\}),(\{2\},\{1,3\}),(\{1,3\},\{2\}),(\{3\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{3\})$$
$$(\{1,2,3\})$$

Il y a donc $u_3 = 13$ partitions ordonnées de $\{1, 2, 3\}$.

3. Pour créer une partition d'un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments, on choisit une partie à k éléments, avec $k \in [\![1, n]\!]$ (il y a $\binom{n}{k}$ telles parties) et ensuite on choisit une partition de l'ensemble restant à $n - k$ éléments. On a donc bien $u_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k}$. Ensuite, les suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, coïncident pour les premiers termes :

$$u_0 = F_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = F_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = F_2 = 3 \quad ; \quad u_3 = F_3 = 13$$

Montrons qu'elles vérifient la même relation de récurrence. On rappelle que $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k$ et

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k} = \sum_{i=n-k}^{=} \sum_{n-1}^{0} \binom{n}{n-i} u_i = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} u_i, \text{car} \binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$$

Les suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coïncident pour les premiers termes et vérifient la même relation de récurrence, donc sont égales.

4.
$$\frac{F_0}{0!} = 1 \text{ et } \frac{1}{(\ln 2)^0} = 1; \text{ donc } \mathscr{P}(0) \text{ est vraie.}$$

Supposons que pour $n \geq 1$ la propriété $\mathscr{P}(k)$ soit vérifiée pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, à savoir supposons que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], 0 \leq \frac{F_k}{k!} \leq \frac{1}{(\ln 2)^k}$. Pour démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, il suffit de démontrer cette inégalité pour F_n. Or

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{F_k}{k!}$$

donc en sommant les n inégalités de l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$0 \leq F_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{(\ln 2)^k}\ .$$

De fait :

$$0 \leq \frac{F_n}{n!} \leq \frac{1}{(\ln 2)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} (\ln 2)^{n-k}$$

et donc par changement d'indice :

$$0 \leq \frac{F_n}{n!} \leq \frac{1}{(\ln 2)^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \,.$$

De plus, d'après le résultat admis on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leq 1$ d'où $0 \leq \dfrac{F_n}{n!} \leq \dfrac{1}{(\ln 2)^n}$.