Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 1 page.

Ce devoir est à rendre pour le lundi 3 mars 2025.

Nombres de Fubini

Extrait de Centrale TSI 2024.

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k\,.$$

1. Justifier que $F_1 = 1$ et déterminer les entiers F_2 et F_3.

On rappelle qu'une partition d'un ensemble E non vide est un ensemble de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion constitue l'ensemble de départ E. Une **partition ordonnée** de E est un p-uplet $(X_1, \dots, X_p)$ tel que $\{X_1, \dots, X_p\}$ est une partition de E.
✍ *Par exemple, les trois partitions ordonnées de l'ensemble* $\{1, 2\}$ *sont* ($\{1\}, \{2\}$), ($\{2\}, \{1\}$) *et* $(\{1, 2\})$.
Par convention, on pose qu'il existe une seule partition ordonnée de l'ensemble vide. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de partitions ordonnées de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

2. Déterminer les partitions ordonnées de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, puis leur nombre.
3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k}$. En conclure que les suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales. Pour construire une partition ordonnée, on pourra commencer par choisir le cardinal de la première partie formant cette partition.
4. En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leq 1$ pour tout entier naturel n non nul, démontrer par récurrence **forte** sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \frac{F_n}{n!} \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}.$$