

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

## POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

1. On fixe  $n \geq 0$  on pose  $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

(a) Commençons par fixer  $\theta \in \mathbb{R}$  et remarquons que :

$$\begin{aligned} T_n(\cos(\theta)) &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{2k} \cos(\theta)^{n-2k} (\cos(\theta)^2 - 1)^k \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{2k} \cos(\theta)^{n-2k} (-\sin(\theta)^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{2k} (-1)^k \cos(\theta)^{n-2k} \sin(\theta)^{2k}. \end{aligned}$$

De plus, par formule de Moivre :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} i^k \sin(\theta)^k. \end{aligned}$$

En passant à la partie réelle, qui ne conservera ici que les termes pairs de la somme, nous obtenons que :

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^p \binom{n}{2k} (-1)^k \cos(\theta)^{n-2k} \sin(\theta)^{2k}$$

car  $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ . In fine, on a bien  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ , ce qui implique que  $T_n$  est bien un polynôme vérifiant la condition voulue.

Pour l'unicité, si  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  vérifient que  $P(\cos(\theta)) = Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a que  $P - Q$  s'annule sur  $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ , qui est un ensemble infini, donc  $P = Q$ .

(b) Remarquons que si on pose  $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  on a  $T_n(\cos(\theta_k)) = 0$ . Pour  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $\theta_k \in [0, \pi]$  et  $\cos$  est injective sur  $[0, \pi]$ , ce qui prouve que les  $x_k = \cos(\theta_k)$  pour  $0 \leq k \leq n-1$  sont  $n$  racines distinctes de  $T_n$ . Or  $\deg(T_n) = n$  : les  $x_k$  pour  $0 \leq k \leq n-1$  sont donc exactement les racines de  $T_n$ .

2. (a) On vérifie rapidement que  $T_0 = 1 =$  et  $T_1 = X$ .

(b) Soit  $x \in [-1, 1]$  ; en posant  $\theta = \arccos(x)$  on a, pour  $n \geq 0$  :

$$T_{n+2}(x) = T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$$

et donc

$$T_n(x) + T_{n+2}(x) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) = 2xT_{n+1}(x).$$

(c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $T_{n+2} - (2XT_{n+1} - T_n)$  s'annule sur l'ensemble infini  $[-1, 1]$  donc est nul.

(d) En utilisant la question (b), on obtient  $T_2 = 2X^2 - 1$ ,  $T_3 = 4X^3 - 3X$  et  $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$ .

3. — Cas  $n=1$ .  $2(T_1 + 1) = 2X + 2(2X)^0$  donc il suffit de poser  $\alpha_{0,1} = 2$ .

— Supposons la propriété vraie aux rangs  $n$  et  $n + 1$  avec  $n \geq 1$ . Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} 2(T_{n+2} + 1) &= 4XT_{n+1} - 2T_n + 2 \quad \text{par 2.(d)} \\ &= 4X \left( \frac{1}{2} \left( (2X)^{n+1} + \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n+1} (2X)^k \right) - 1 \right) - 2 \left( \frac{1}{2} \left( (2X)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,n} (2X)^k \right) - 1 \right) + 2 \\ &= (2X)^{n+2} + \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n+1} (2X)^{k+1} - 2(2X) - (2X)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,n} (2X)^k \\ &= (2X)^{n+2} + \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n+1} (2X)^{k+1} + (-2)(2X) + (-1)(2X)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-\alpha_{k,n}) (2X)^k, \end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme voulue.