Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 1 page.

Ce devoir est à rendre pour le lundi 3 février 2025.

Polynômes de Tchebychev

Dans toute la suite, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$:

$$T_n = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k \in \mathbb{R}[X] \,.$$

Cet objet est appelé n**–ième polynôme de Tchebychev** (de ses prénoms Pafnuty Lvovich, mathématicien russe, 1821—1894). On l'identifiera, lorsque cela sera pertinent, à sa fonction polynomiale associée (définie sur $\mathbb{R}$).

1. On fixe $n \geq 0$.
   (a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que que $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et qu'il s'agit de T_n.
   (b) Déterminer les racines de T_n.
2. (a) Déterminer T_0 et T_1.
   (b) Soit $x \in [-1, 1]$. Démontrer, à l'aide de la fonction arcos, que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)\,.$$
   (c) En déduire que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (d) Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.
3. Démontrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante : pour tout $n \geq 1$, il existe une famille $\alpha_{0,n}, \ldots, \alpha_{n-1,n}$ **d'entiers dépendants de** n telle que :
   $$2(T_n + 1) = (2X)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,n}(2X)^k\,.$$