

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

## ÉQUATION DE BESSEL

– I –

1.  $I$  est convexe ne contenant pas zéro. De fait, si  $x \in I$ ,  $-x \notin I$ , d'où le résultat.

Dans toute la suite on considérera, pour simplifier, que  $I = \mathbb{R}_+^*$ .

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 équivalente sur  $I$  à

$$y' + \frac{1}{\operatorname{th}(x)}y = 0$$

et donc ses solutions sont de la forme  $x \mapsto \frac{C}{\operatorname{sh}(x)}$ , pour  $C \in \mathbb{R}$ .

3. (a) Soit  $x \in I$ . Alors  $g$  est dérivable en  $x$  par opérations usuelles et

$$g'(x) = f''(x) + \frac{1}{\operatorname{th}(x)}f'(x) - \frac{1}{\operatorname{sh}(x)^2}f(x).$$

Ainsi,  $g$  est solution de (2) si et seulement si pour tout  $x \in I$  on a :

$$\operatorname{sh}(x)f''(x) + \operatorname{ch}(x)f'(x) - \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}f(x) + \operatorname{ch}(x)f'(x) + \operatorname{sh}(x)f(x) = 0$$

i.e

$$\operatorname{sh}(x)f''(x) + 2\operatorname{ch}(x)f'(x) + \operatorname{sh}(x)f(x)$$

car  $\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$ .

(b) D'après les questions 2. et 3.(a),  $f$  est solution de (1) si et seulement si il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $f$  soit solution de l'équation.

$$y' + \frac{1}{\operatorname{th}(x)}y = \frac{C}{\operatorname{sh}(x)}.$$

Nous avons déjà résolu l'équation homogène associée à cette en 2. (elle est équivalente à l'équation (2) sur  $I$ ) ; une variation de la constante nous livre ensuite  $x \mapsto \frac{Cx}{\operatorname{sh}(x)}$  comme solution particulière. Cela entraîne que  $f$  est de la forme  $x \mapsto \frac{A + Cx}{\operatorname{sh}(x)}$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .

– II –

1. (a) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on sait que  $A(x) \in GL_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow W(x) \neq 0$ .

(b)  $W$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par opération sur les fonctions  $f$  et  $g$  qui le sont également. De plus, pour tout  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} W'(x) &= f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) - f''(x)g(x) - f'(x)g'(x) \\ &= f(x)g''(x) - f''(x)g(x) \\ &= (p(x) - q(x))f(x)g(x). \end{aligned}$$

2. (a) Cf. cours.  
 (b) Supposons que  $f'(a) = 0$ ; dans ce cas  $f$  doit être solution du problème de Cauchy donné par :

$$\begin{cases} y'' + py = 0 \\ y(a) = 0 \\ y'(a) = 0 \end{cases} .$$

Or, la fonction nulle étant également solution de ce problème de Cauchy, l'unicité de ladite solution impose que  $f = 0$ , ce qui est absurde. Un raisonnement similaire implique que  $f'(b) \neq 0$ .

- (c) Soit  $x \in ]a, b[$ ; alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x)}{x - a} > 0$$

et donc, en passant à la limite quand  $x \rightarrow a$ , on obtient que  $f'(a) \geq 0$ . De la même façon, on démontre que  $f'(b) \leq 0$ . Les inégalités strictes découlent ensuite de la question 2.(b).

- (d) Supposons que  $g$  ne s'annule pas sur  $]a, b[$ ; alors quitte à remplacer  $g$  par  $-g$ , on peut supposer que  $g > 0$  sur cet intervalle (par continuité). Dans ce cas, comme  $f > 0$  et que  $p \leq q$  sur  $]a, b[$  la question 1. entraîne que  $W' \leq 0$ . De fait, que la fonction  $W$  est décroissante sur l'intervalle  $]a, b[$ .

Or  $W(a) = -f'(a)g(a) < 0$  et  $W(b) = -f'(b)g(b) > 0$ , ce qui pose problème. On en déduit donc le résultat souhaité.

3. (a) Pour  $p : x \mapsto 1$ ,  $f$  est de la forme  $f : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x)$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$  (l'équation (3) est alors une équation d'ordre 2 éminemment classique). On se donne ensuite  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $b - a = \pi$ ; dans ce cas on peut choisir de poser  $A = \sin(a)$  et  $B = \cos(a)$  (rappelons que  $g$  ne dépend pas de  $f$ , que nous sommes donc libres de choisir) et obtenir que  $f : x \mapsto \sin(x - a)$  par une formule de trigonométrie. Cette fonction vérifie alors les conditions de la question 2. et donc  $g$  doit s'annuler sur  $]a, b[$  par 2.(d).  
 (b) Supposons  $q \leq 1$  sur  $I$  et non nulle s'annulant au moins deux fois sur tout segment de longueur  $\pi$ . Fixons ensuite  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < b - a < \pi$  tels que  $g(a) = g(b) = 0$ . Quitte à réduire l'intervalle  $]a, b[$ , on peut supposer par non nullité et continuité de  $g$  que  $g$  ne s'y annule pas.  
 Les rôles de  $(f, p)$  et  $(g, q)$  étant symétriques, on peut alors déduire de la question 2.(d) que toute solution de l'équation (3) pour  $p = 1$  devrait s'annuler sur  $]a, b[$ , ce qui n'est pas le cas de  $x \mapsto \cos\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ .

### – III –

1. La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  par opérations et pour tout  $x > 0$  on a :

$$g'(x) = f'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)$$

et

$$g''(x) = f''(x)\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}f'(x) - \frac{1}{4x^{3/2}}f(x)$$

d'où le résultat par calcul direct ?

2. (a) Pour tout  $x > 0$ , il est clair que  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ .  
 (b) Il faut appliquer la question II.3 à  $g$ , avec  $q : x \mapsto 1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}$ , en remarquant que si  $\lambda \geq \frac{1}{2}$ ,  $q \leq 1$  et sinon  $q \geq 1$ .