

Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 2 pages.

### ÉQUATION DE BESSEL

On étudiera à plusieurs reprises dans ce problème des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients **non constants**, qui ne rentrent donc pas dans le cadre du cours ; attention donc à lire **attentivement** l'énoncé des questions. On cherchera toujours les solutions à valeurs réelles des équations proposées. **La partie I est indépendante des parties II et III.**

#### – I –

On s'intéresse ici aux équations suivantes, définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $0 \notin I$ .

$$\operatorname{sh}(x)y'' + 2\operatorname{ch}(x)y' + \operatorname{sh}(x)y = 0 \quad (1)$$

$$\operatorname{sh}(x)y' + \operatorname{ch}(x)y = 0 \quad (2)$$

1. Justifier **proprement** que  $I \subset \mathbb{R}_+^*$  ou  $I \subset \mathbb{R}_-^*$ .

*Dans toute la suite on considérera, pour simplifier, que  $I = \mathbb{R}_+^*$ .*

2. Résoudre l'équation (2).
3. (a) Soit  $f \in \mathcal{C}^2(I)$ . Démontrer que  $f$  est solution de l'équation (1) si et seulement si  $g : x \mapsto f'(x) + \frac{1}{\operatorname{th}(x)}f(x)$  est solution de (2).  
(b) En déduire les solutions de l'équation (1).

#### – II –

On fixe dans cette partie un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et deux fonctions  $p, q \in \mathcal{C}^0(I)$ . On suppose trouvées  $f, g \in \mathcal{C}^2(I)$  telles que :

$$f'' + p(x)f = 0 \quad (3)$$

et

$$g'' + q(x)g = 0. \quad (4)$$

1. On pose, pour  $x \in I$ , la matrice suivante :

$$A(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- (a) On pose, pour  $x \in I$ ,  $W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ . À quelle condition sur  $W(x)$  a-t-on  $A(x) \in GL_2(\mathbb{R})$  ?
- (b) Justifier que  $W \in \mathcal{C}^1(I)$  et démontrer que

$$\forall x \in I, \quad W'(x) = (p(x) - q(x))f(x)g(x).$$

2. On suppose dans cette question que  $p \leq q$  sur l'intervalle  $I$  et qu'il existe deux réels  $a < b$  tels que  $f(a) = f(b) = 0$  et que  $f(]a, b[) \subset \mathbb{R}_+^*$ .  
(a) Énoncer le théorème de Cauchy associé aux équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.  
(b) En admettant que le théorème énoncé ci-avant s'applique à l'équation (3), démontrer que  $f'(a)$  et  $f'(b)$  sont non nuls.

- (c) Montrer, à l'aide d'un taux d'accroissement, que  $f'(a) > 0$  et  $f'(b) < 0$ .
- (d) Démontrer par l'absurde à l'aide du résultat de la question 1. qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ .
3. (a) Démontrer que si  $q \geq 1$  sur  $I$  alors  $g$  s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur  $\pi$ . *Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 2. en fixant  $p = 1$  et en résolvant (3) dans ce cas.*
- (b) Montrer par l'absurde que si  $q \leq 1$  sur  $I$  et que si  $g$  n'est pas nulle alors  $g$  s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à  $\pi$ .

## – III –

On fixe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et on considère l'équation de Bessel, définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0. \quad (5)$$

1. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ ; démontrer que  $f$  est solution de (5) si et seulement si  $g : x \mapsto f(x)\sqrt{x}$  est solution de l'équation suivante :

$$y'' + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right)y = 0. \quad (6)$$

2. (a) Vérifier que si  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$  est solution de (5) et que  $g : x \mapsto f(x)\sqrt{x}$  alors

$$f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\}).$$

- (b) On suppose que  $f$  est une solution non nulle de (5). Démontrer que :
- i. si  $\lambda \geq \frac{1}{2}$  alors  $f$  s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à  $\pi$ ;
  - ii. si  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  alors  $f$  s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur  $\pi$ .