

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

NOMBRES DE MERSENNE, NOMBRES PARFAITS

– I –

1. La somme des diviseurs positifs stricts de p est toujours égale à 1, qui est différent de p .
2. L'entier n est parfait si et seulement si $S(n) - n = n$, d'où le résultat.
3. (a) Si n n'admet qu'un diviseur premier, alors n est de la forme p^α avec p premier et $\alpha \geq 1$. Dans ce cas on a :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{\alpha} p^k = \frac{p^{\alpha+1}}{p-1}$$

d'où le résultat.

- (b) i. Par hypothèse, $n = mp_{r+1}^{\alpha_{r+1}}$ et $m \wedge p_{r+1} = 1$. De fait, si p est un nombre premier, le lemme de Gauss nous affirme que :

$$p|n \iff p|m \text{ ou } p|p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}$$

et donc, par décomposition en produit de facteurs premiers, les diviseurs de n sont exactement les entiers de la forme $d_i p_{r+1}^j$ avec $j \in \llbracket 0, \alpha_{r+1} \rrbracket$. On a donc bien :

$$S(n) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{\alpha_{r+1}} d_i p_{r+1}^j.$$

- ii. D'après la question précédente ! :

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{\alpha_{r+1}} d_i p_{r+1}^j \\ &= \left(\sum_{i=1}^N d_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\alpha_{r+1}} p_{r+1}^j \right) \\ &= S(m) \sum_{j=0}^{\alpha_{r+1}} p_{r+1}^j. \end{aligned}$$

- iii. Par hypothèse de récurrence, $S(m) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$ et donc, par somme géométrique :

$$S(n) = \left(\prod_{i=1}^r \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) \left(\frac{p_{r+1}^{\alpha_{r+1}+1} - 1}{p_{r+1} - 1} \right) = \prod_{i=1}^{r+1} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

et donc la propriété est héréditaire

4. Si n et m sont premier entre eux, ils n'ont aucun facteur premier commun. De fait, on peut écrire leurs décompositions en produits de facteurs premiers sous la forme :

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad m = \prod_{j=1}^{\ell} q_j^{\beta_j}$$

avec $\{p_1, \dots, p_k\} \cap \{q_1, \dots, q_\ell\} = \emptyset$. Ceci entraîne que la décomposition en produit de facteurs premiers de nm est donnée par :

$$nm = \left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} \right) \left(\prod_{j=1}^{\ell} q_j^{\beta_j} \right)$$

et donc d'après la question précédente :

$$S(nm) = \left(\prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) \left(\prod_{j=1}^{\ell} \frac{q_j^{\beta_j+1} - 1}{q_j - 1} \right) = S(n)S(m).$$

– II –

1. Si n est composé, il peut s'écrire sous la forme $n = ab$ avec $a, b \geq 2$. On a alors :

$$M_n = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1) \sum_{k=0}^{b-1} 2^{ak},$$

cette factorisation étant non triviale. De fait, M_n est bien composé.

2. Le nombre M_p étant premier, on a $p \geq 2$ d'après la question précédente et donc $M_p \geq 3$. De fait, M_p est impair et donc premier avec 2 ; on a donc :

$$\begin{aligned} S(2^{p-1}M_p) &= S(2^{p-1})S(M_p) \text{ par I.4} \\ &= \frac{2^p - 1}{2 - 1} (1 + M_p) \\ &= M_p + 2^p M_p - M_p \\ &= 2^p M_p. \end{aligned}$$

3. (a) Cf. cours.
(b) Comme $2^a \wedge b = 1$ (car b est impair) on a, par I.4 :

$$S(2^a b) S(2^a) S(b) = (2^{a+1} - 1) S(b).$$

Comme n est parfait, on a de plus $2n = S(n)$ par I.2, soit :

$$2^{a+1}b = (2^{a+1} - 1)S(b).$$

- (c) D'après la question précédente, $2^{a+1} - 1 \mid 2^{a+1}b$. De plus, par imparité, 2^{a+1} et donc, d'après le lemme de Gauss, $2^{a+1} - 1 \mid b$. Remarquons ensuite que :

$$b + \frac{b}{2^{a+1} - 1} = \frac{2^{a+1}b}{2^{a+1} - 1} = S(b)$$

et donc, comme b et $\frac{b}{2^{a+1} - 1}$ sont deux diviseurs positifs de b dont la somme vaut $S(b)$, ce sont les seuls.

- (d) Notons que $b \neq 1$ car sinon $2n = 2^{a+1} - 1$ serait impair. De fait, comme 1 est un diviseur strict de b , et que les deux seuls diviseurs positifs de b sont b et $\frac{b}{2^{a+1} - 1}$ on a nécessairement $1 = \frac{b}{2^{a+1} - 1}$ et donc $b = 2^{a+1} - 1 = M_{a+1}$. Comme b n'admet pour diviseurs positifs que 1 et b , il s'agit d'un nombre de Mersenne premier.
(e) D'après la question précédente, tout entier parfait pair n est de la forme $2^a M_{a+1}$. De plus, M_{a+1} étant premier, $a + 1$ l'est également par II.1.