

Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 2 pages.

Ce devoir est à rendre pour le lundi 6 janvier 2025.

### NOMBRES DE MERSENNE, NOMBRES PARFAITS

Commençons ce problème par une paire de définitions...

— Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle **nombre de Mersenne** d'indice  $n$  l'entier

$$M_n = 2^n - 1.$$

— Un entier  $n \in \mathbb{N}$  est appelé **nombre parfait** si il est la somme de ses diviseurs positifs **stricts** (i.e différents de lui-même). Ainsi,  $n$  est parfait si

$$n = \sum_{d \in \mathcal{D}^*(n)} d, \quad \text{où } \mathcal{D}^*(n) = \{d \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \mid d \text{ divise } n\}.$$

Par exemple, les diviseurs positifs stricts de 6 sont 1, 2 et 3 : de fait, 6 est un nombre parfait car  $6 = 1 + 2 + 3$ . À l'inverse, 4 n'est pas un nombre parfait car  $4 \neq 1 + 2$ .

– I –

1. Soit  $p$  un nombre premier ; démontrer que  $p$  ne peut pas être un nombre parfait.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; on note  $S(n)$  la somme de ses diviseurs positifs. Justifier que  $n$  est un nombre parfait si et seulement si  $2n = S(n)$ .
3. On souhaite dans cette question démontrer par récurrence sur  $r \in \mathbb{N}^*$  la propriété  $\mathcal{P}(r)$  suivante : *pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  admettant  $r$  diviseurs premiers distincts, on a :*

$$S(n) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

où

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}.$$

est la décomposition en produit de facteurs premiers de  $n$ .

- (a) Démontrer que  $\mathcal{P}(1)$  est vérifiée.
- (b) Supposons la propriété vérifiée à un certain rang  $r \geq 1$  et fixons un entier  $n$  de décomposition en produit de facteurs premiers

$$n = \prod_{i=1}^{r+1} p_i^{\alpha_i} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}.$$

- i. Notons  $d_1, \dots, d_N$  les diviseurs de  $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ . Démontrer que

$$S(n) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{\alpha_{r+1}} d_i p_{r+1}^j.$$

- ii. En déduire que

$$S(n) = S(m) \sum_{j=0}^{\alpha_{r+1}} p_{r+1}^j.$$

- iii. Conclure.

4. En utilisant le résultat obtenu à la question précédente, démontrer que si  $n$  et  $m$  sont deux entiers premiers entre eux, alors  $S(nm) = S(n)S(m)$ .

## – II –

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  : démontrer que si le nombre de Mersenne  $M_n$  est premier,  $n$  l'est également.
2. Soit  $p$  un nombre premier tel que  $M_p$  soit également premier. Démontrer que  $2^{p-1}M_p$  est un nombre parfait.
3. Fixons dans cette question un nombre parfait **pair**  $n$ .
  - (a) On pose  $a = v_2(n)$  la valuation 2-adique de l'entier  $n$ . Rappeler la définition de cette dernière et justifier qu'il existe un nombre impair  $b$  tel que  $n = 2^a b$ .
  - (b) Montrer que  $S(n) = (2^{a+1} - 1)S(b)$  et en déduire que  $2^{a+1}b = (2^{a+1} - 1)S(b)$ .
  - (c) Démontrer que  $(2^{a+1} - 1)$  divise  $b$  et que les seuls diviseurs positifs de  $b$  sont  $b$  et  $\frac{b}{2^{a+1} - 1}$ .
  - (d) Conclure que  $b$  est égal à  $2^{a+1} - 1$ . Est-il premier ?
  - (e) Faire le bilan des questions précédentes en démontrant que tout nombre parfait pair est de la forme  $2^{p-1}M_p$ , avec  $p$  et  $M_p$  tous deux premiers.