Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

Automorphismes intérieurs, centre

1. (a) Pour $x, y \in G$ on a :

$$\tau_a(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \tau_a(x)\tau_a(y)$$

d'où le résultat.

(b) Soit $x \in G$; alors :

$$\tau_{ab}(x) = (ab)x(ab)^{-1} = a(bxb^{-1})a^{-1} = \tau_a(\tau_b(x))$$

et donc on a bien $\tau_{ab} = \tau_a \circ \tau_b$.

(c) Il suffit de remarquer que $\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \mathrm{id}_G$ pour obtenir que τ_a est un endomorphisme bijectif de réciproque $\tau_{a^{-1}}$. Il s'agit donc bien d'un automorphisme de G.

2. On a vu en 1.(c) que $\mathrm{Int}(G) \subset \mathfrak{S}(G)$. De plus, $\mathrm{id}_{\mathrm{G}} = \tau_{e_G} \in \mathrm{Int}(G)$ et d'après 1.(b) et 1.(c), cet ensemble est stable par composée et inverse.

3. (a) Il est clair que $Z(G)$ est un sous–ensemble de G contenant e_G. De plus, si $x, y \in Z(G)$ on a, pour tout $g \in G$:

$$\begin{aligned}(xy^{-1})g &= x(g^{-1}y)^{-1} \\ &= x(yg^{-1})^{-1} \\ &= (xg)y{-}1 \\ &= g(xy^{-1})\end{aligned}$$

et donc $xy^{-1} \in Z(G)$.

(b) Il faut (et suffit) que G soit abélien.

(c) On vérifie rapidement $\tau_a = \mathrm{id}_G$.