Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 1 page.

Ce devoir est à rendre pour le lundi 2 décembre 2024.

Automorphismes intérieurs, centre

Soit G un groupe (noté multiplicativement). Pour $a \in G$, on pose :

$$\tau_a : G \to G \\ x \mapsto axa^{-1} .$$

1. Soient $a, b \in G$.
   (a) Vérifier que τ_a est un morphisme du groupe G.
   (b) Démontrer que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
   (c) Montrer que τ_a est un automorphisme de G et déterminer son inverse.
2. Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Int}(G) = \{\tau_a \,|\, a \in G\}$ est un sous–groupe de $(\mathfrak{S}(G), \circ)$.
3. On appelle **centre** du groupe G l'ensemble $Z(G) = \{x \in G \,|\, \forall g \in G,\ xg = gx\}$.
   (a) Démontrer que $Z(G)$ est un sous–groupe de G.
   (b) À quelle condition sur G a–t–on $Z(G) = G$?
   (c) Que dire de τ_a, lorsque $a \in Z(G)$?