

Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 1 page.

Ce devoir est à rendre pour le lundi 18 novembre 2024.

THÉORÈME DE BOLZANO–WEIERSTRASS

L'objectif de ce devoir est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 (Bolzano–Weierstrass).

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

On fixe une suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que l'on suppose bornée par un réel $M \geq 0$, ce qui implique que pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [-M, M]$.

1. On définit par récurrence deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ comme suit :

— on pose $a_0 = -M$ et $b_0 = M$;

— pour $n \geq 0$, on pose $A_n = \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right]$ et $B_n = \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right]$;

* si A_n contient une infinité de terme de la suite $(u_n)_n$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$;

* sinon, on pose $b_{n+1} = b_n$ et $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

(a) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \geq 0$, le segment $I_n = [a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$.

(b) Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.

2. On définit une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la façon suivante :

— on pose $\varphi(0) = 0$;

— pour $n \geq 0$ on pose $\varphi(n+1) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid (m > \varphi(n)) \wedge (u_m \in [a_{n+1}, b_{n+1}])\}$.

(a) Justifier que le minimum ci-dessus existe bien et que φ est strictement croissante.

(b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{\varphi(n)} \in I_n$.

3. Conclure la démonstration.