

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

SOUS-GROUPES DE \mathbb{R}

– I –

1. \mathbb{R}_+ n'étant pas stable par soustraction, il est le seul ensemble de la liste qui n'est pas un sous-groupe.
2. $0 \in G_1 \cap G_2 \subset \mathbb{R}$ et si $x, y \in G_1 \cap G_2$ alors $x, y \in G_1$ donc $x - y \in G_1$ et $x, y \in G_2$ donc $x - y \in G_2$. In fine, $x - y \in G_1 \cap G_2$ et donc cet ensemble vérifie les trois propriétés définissant un sous-groupe.
3. (a) $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ et $0 = a \times 0 \in a\mathbb{Z}$. De plus, si $x, y \in a\mathbb{Z}$ alors il existe $k, h \in \mathbb{Z}$ tels que $x = ak$ et $y = ah$. De fait :

$$x - y = a \underbrace{(k - h)}_{\in \mathbb{Z}} \in a\mathbb{Z}$$

d'où le résultat.

- (b) $G_1 \cup G_2$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de \mathbb{R} : $2, 5 \in 2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$ et pourtant $5 - 2 = 3 \notin 2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$.
4. $0, g \in G$ donc $-g = 0 - g \in G$; par récurrence on obtient que pour tout $n \geq 0$, $-ng \in G$. Ensuite, $ng = 0 - ng \in G$ et donc on a bien $g\mathbb{Z} \subset G$.

– II –

1. Comme $G \neq \{0\}$, il existe un $x \in G$ non nul. Si x est positif, $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$. Sinon, $-x = 0 - x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$. L'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est donc non vide et minoré (par 0), d'où le résultat.
2. (a) i. Comme $a > 0$, $2a > a$ et donc par définition de borne inférieure, $2a$ ne minore pas $G \cap \mathbb{R}_+^*$. De fait, il existe $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $b < 2a$. Comme $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ et $a \notin G$, on a de plus $a < b$ d'où le résultat.
 ii. Comme b ne minore pas $G \cap \mathbb{R}_+^*$, il existe $c \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < c < b$. On en déduit le résultat.
 iii. $b - c \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $b - c < \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$, ce qui est absurde. On en déduit que $a \in G$ et donc, par I.4, que $a\mathbb{Z} \subset G$.
- (b) i. Par définition, $n \leq \frac{g}{a} < n + 1$ et donc $na \leq g < na + a$, ergo $0 \leq g - na < a$.
 ii. Par stabilité, $g - na \in G$; de fait, si on suppose que cet élément est non nul, il est dans $G \cap \mathbb{R}_+^*$ et minore strictement la borne inférieure de cet ensemble, à savoir a . Ceci est absurde, donc $g = na$.
 (c) Par la question 2.(a), $a\mathbb{Z} \subset G$ et par la question 2.(b), tout élément de G s'écrit sous la forme na avec $n \in \mathbb{Z}$, ce qui fournit l'inclusion réciproque.
3. Dans cette question, on suppose $a = 0$.
 (a) Fixons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
 i. Comme $y - x > 0 = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$, cet élément ne minore pas $G \cap \mathbb{R}_+^*$ et donc il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < g < y - x$.
 ii. Par définition, on a $\frac{x}{g} \leq n \frac{x}{g} + 1$ et donc $x < ng < x + g$. Or $g < y - x$ donc $g \in]x, y[$.
 (b) On a démontré que pour tous réels x, y il existe (quand $a = 0$) un élément $g \in G$ tel que $x < g < y$, d'où le résultat.
4. Cela découle des questions 2.(c) et 3.(b).