Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 2 page.

Ce devoir est à rendre pour le lundi 4 novembre 2024.

Sous–groupes de $\mathbb{R}$

Dans toute la suite, on dira qu'un ensemble G est un **sous–groupe** de $\mathbb{R}$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(SG1) $G \subset \mathbb{R}$;

(SG2) $0 \in G$;

(SG3) $\forall x, y \in G$, $x - y \in G$;

On dira également qu'un sous groupe G de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, $G \cap]x, y[\neq \emptyset$.

– I –

1. Pour chacun des ensembles suivants, justifier s'ils sont ou non des sous–groupes de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$, $\{0\}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$.
2. Soient G_1 et G_2 deux sous–groupes de $\mathbb{R}$. Démontrer que dans ce cas $G_1 \cap G_2$ est un sous–groupe de $\mathbb{R}$.
3. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous–groupe de $\mathbb{R}$.
   (b) Soient G_1 et G_2 deux sous–groupes de $\mathbb{R}$. Que dire de $G_1 \cup G_2$?
4. Soit G un sous–groupe de $\mathbb{R}$ et soit $g \in G$. Démontrer qu'alors $g\mathbb{Z} \subset G$.

– II –

On fixe dans toute cette partie un sous–groupe G de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$.

1. Justifier que l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure $a \in \mathbb{R}_+$.
2. Dans cette question, on suppose $a > 0$.
   (a) Commençons par supposer que $a \notin G$.
      i. Démontrer qu'il existe $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b < 2a$.
      ii. En déduire qu'il existe $c \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < b - c < a$.
      iii. Conclure en utilisant la question précédente que $a \in G$ et que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   (b) On se fixe dans cette question un élément $g \in G$ et on pose $n = \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor$.
      i. Démontrer que $0 \leq g - na < a$.
      ii. En déduire que $g = na$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $(a > 0) \Rightarrow (G = a\mathbb{Z})$.
3. Dans cette question, on suppose $a = 0$.
   (a) Fixons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
      i. Démontrer qu'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < g < y - x$.
      ii. Posons $n = \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor + 1$. Montrer que $ng \in]x, y[$.
   (b) Déduire de ce qui précède que $(a = 0) \Rightarrow$ (G est dense dans $\mathbb{R}$).
4. Faire la synthèse de cette partie en démontrant le résultat suivant.

> **Proposition 1.**
> *Soit G un sous–groupe de $\mathbb{R}$. Alors :*
> — *soit il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = a\mathbb{Z}$;*
> — *soit G est dense dans $\mathbb{R}$.*