Chapitre XXVIII

Familles sommables

Nous fixons dans ce chapitre un ensemble I quelconque.

1.⁻ Familles sommables de réels positifs

a) C'est quoi ?

Proposition XXVIII.1. Soit $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs. Alors l'ensemble

$$S(u) = \left\{ \sum_{i\in J} u_i \;\middle|\; J \subset I \text{ fini} \right\}$$

admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. L'ensemble $S(u)$ est une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ et donc admet une borne supérieure d'après la proposition III.9. Notons de plus que $S(u) \subset \mathbb{R}_+$, ce qui entraîne que $\sup(S(u)) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. □

Notation. La quantité $\sup(S(u))$ est appelée **somme** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ et est notée $\sum_{i\in I} u_i$.

✌ **Remarque XXVIII.1.** Comme indiqué dans la démonstration *supra*, on a :

$$\sum_{i\in I} u_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\,.$$

Notons au passage que la somme d'une famille de réels positifs existe **toujours** (mais peut être égale à $+\infty$).

Définition XXVIII.1. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** si

$$\sum_{i\in I} u_i < +\infty\,.$$

✌ **Remarque XXVIII.2.** Cela est équivalent à dire que la somme de la famille appartient à $\mathbb{R}_+$. Notons que dans le cas présent, une famille est soit sommable, soit de somme infinie, ce qui est fort pratique car l'on peut toujours "calculer" sa somme.

➠ **Exemple XXVIII.1.**

— La famille $u = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable. En effet, l'ensemble $S(u)$ contient les sommes

$$H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N}$$

qui sont équivalentes à $\ln(N)$ lorsque $N \to \infty$ (*cf.* chapitre XXII) et donc ne sont pas bornées. De fait, $\sup(S(u)) = +\infty$.

— Fixons $x \in [0, 1[$ et étudions le caractère sommable de la famille $u = (x^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$; pour ce faire, fixons $F \subset \mathbb{Z}$ un ensemble fini et remarquons que :

$$\sum_{n\in F} x^{|n|} = \underbrace{\sum_{n\in F\cap\mathbb{N}} x^n}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n\in F\setminus\mathbb{N}} x^{-n}}_{S_2}.$$

Posons $M = \max\{|n| \,|\, n \in F\}$; alors on a :

$$S_1 \leq \sum_{n=0}^{M} x^n = \frac{1-x^{M+1}}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}$$

et :

$$S_2 \leq \sum_{n=-M}^{-1} x^{-n} = \sum_{n=1}^{M} x^n = x\,\frac{1-x^M}{1-x} \leq \frac{x}{1-x}.$$

In fine, on en déduit que :

$$\sum_{n\in F} x^{|n|} = S_1 + S_2 \leq \frac{1+x}{1-x}$$

et donc, comme ce majorant ne dépend pas de l'ensemble F, il majore l'ensemble $S(u)$. On en déduit que la borne supérieure de cet ensemble existe dans $\mathbb{R}_+$ et donc que la famille u est sommable. Par ailleurs, remarquons que, pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} x^{|n|} &= \sum_{n=0}^{N} x^n + \sum_{n=-N}^{-1} x^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N} x^n + \sum_{n=1}^{N} x^n \\
&= \frac{1-x^{N+1}}{1-x} + \frac{x-x^{N+1}}{1-x} \\
&= \frac{1+x-2x^{N+1}}{1-x} \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1+x}{1-x}
\end{aligned}$$

et donc, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure (proposition VII.22), on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{|n|} = \frac{1+x}{1-x}\,.$$

Proposition XXVIII.2. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et soit $J \subset I$. Alors :

$$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i\,.$$

Démonstration. Alors, si on pose $u' = (u_i)_{i\in J}$, a clairement $S(u') \subset S(u)$ et donc, dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\sup(S(u')) \leq \sup(S(u))$. La borne supérieure de $S(u)$ étant finie, on obtient le résultat voulu. □

✌ **Remarque XXVIII.3.** En particulier, toutes les sous–familles d'une famille sommable positive sont sommables.

➠ **Exemple XXVIII.2.** La famille $(x^{2|n|+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable pour $x \in]0,1[$ (considérer $J = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, |k| \equiv 1\,[2]\}$.

Proposition XXVIII.3. Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs telles que $\forall i \in I$, $u_i \leq v_i$. Alors :

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i\,.$$

Démonstration. Si $F \subset I$ est un ensemble fini alors on a, par définition de borne supérieure :

$$\sum_{i\in F} u_i \leq \sum_{i\in F} v_i \leq \sum_{i\in I} v_i\,.$$

Ceci entraîne que $\sum_{i\in I} v_i$ majore $S(u)$ et donc que :

$$\sup(S(u)) = \sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i\,.$$

□

✌ **Remarque XXVIII.4.** On en déduit que la sommabilité de $(v_i)_i$ (resp. la non sommabilité de $(u_i)_i$) entraîne celle de $(u_i)_i$ (resp. de $(v_i)_i$).

b) Exemples fondamentaux

Proposition XXVIII.4. Si $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ est un ensemble fini, toute famille $(u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=1}^{n} u_{i_k}\,.$$

Démonstration. Par positivité on a, pour tout $F \subset I$ (automatiquement fini, donc) :

$$\sum_{i\in F} u_i \leq \sum_{k=1}^{n} u_{i_k}\,.$$

Ceci entraîne que $\sup(S(u))$ est fini et majoré par $\sum_{k=1}^{n} u_{i_k}$. Cette borne étant atteinte en $F = I$, on obtient le résultat désiré. □

✌ **Remarque XXVIII.5.** Ceci est plutôt rassurant, nous en convenons.

Proposition XXVIII.5. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs. Alors :

(i) la famille $(u_n)_n$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge ;

(ii) dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,.$$

Démonstration. Soit $F \subset N$ un ensemble fini ; on peut alors poser $N = \max(F)$. Si la série $\sum u_n$ converge, on a par positivité :

$$\sum_{n\in F} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

et donc la famille $(u_n)_n$ est sommable, avec :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}u_n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,.$$

Pour démontrer l'égalité, il ne nous reste qu'à remarquer que, pour $F = [\![0, N]\!]$:

$$\sum_{n\in F} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

et à appliquer la caractérisation séquentielle de la borne supérieure (proposition VII.22).

Inversement, si la série $\sum u_n$ est divergente, alors on a, par positivité, que :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+,\ \exists N \in \mathbb{N},\quad \sum_{n=0}^{N} u_n \geq M\,.$$

On en déduit que l'ensemble $S(u)$ n'est pas majoré et donc que sa borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ est égale à $+\infty$. □

c) Opérations sur les sommes

Proposition XXVIII.6 (Invariance par permutation)**.** Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et soit $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$. Alors :

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} u_i\,.$$

En particulier, la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable si et seulement $(u_i)_{i\in I}$ l'est.

Démonstration. Si $F \subset I$ est un ensemble fini, alors $G = \sigma(F)$ est également une partie finie de I (de même cardinal que F) et l'on a :

$$\sum_{i\in F} u_{\sigma(i)} = \sum_{j\in G} u_j \leq \sum_{i\in I} u_i$$

et donc, par majoration :

$$\sum_{i\in I} u_{\sigma(i)} \leq \sum_{i\in I} u_i\,.$$

Réciproquement, en posant $H = \sigma^{-1}(F)$:

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{i\in F} u_{\sigma(\sigma^{-1}(i))} = \sum_{j\in H} u_{\sigma(j)} \leq \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

ergo, par majoration :

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}\,,$$

d'où le résultat. □

✌ **Remarque XXVIII.6.** Un corollaire de ce résultat est que pour toute série $\sum u_n$ à termes positifs et toute bijection $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, la convergence de la série $\sum u_{\sigma(n)}$ équivaut à celle de $\sum u_n$ et on a, le cas échéant, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,.$$

Proposition XXVIII.7. Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs et soit $\mu \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\sum_{i\in I} u_i + \mu v_i = \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i\,.$$

✖ **Attention :** nous avons supposé μ **positif.**

Démonstration. Soit $F \subset I$ un ensemble fini. Alors :

$$\sum_{i\in F} u_i + \mu v_i = \sum_{F\in I} u_i + \mu \sum_{F\in I} v_i \leq \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

et donc par majoration

$$\sum_{i\in I} u_i + \mu v_i \leq \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i \,.$$

De plus, par caracterisation séquentielle de la borne supérieure (proposition VII.22), il existe des ensembles finis $F_n, G_n \subset I$ tels que :

$$\sum_{i\in F_n} u_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i\in I} u_i \quad \text{et} \quad \sum_{i\in G_n} v_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i\in I} v_i \,.$$

De plus, notons que comme $F_n \subset F_n \cup G_n$ on a, pour tout $n \geq 0$:

$$\sum_{i\in F_n} u_i \leq \sum_{i\in F_n\cup G_n} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$$

et donc, par encadrement (théorème VII.11) on a :

$$\sum_{i\in F_n\cup G_n} u_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i\in I} u_i \,.$$

Un raisonnement similaire pouvant être appliqué à G_n, on obtient *in fine* :

$$\sum_{i\in F_n\cup G_n} u_i + \mu v_i = \sum_{F\in F_n\cup G_n} u_i + \mu \sum_{F\in F_n\cup G_n} v_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

d'où le résultat, une fois encore par caractérisation séquentielle. □

d) Sommation par paquets

Théorème XXVIII.8 (Sommation par paquets)**.**
On suppose ici qu'il existe une famille $(I_j)_{j\in J}$ d'ensembles deux à deux disjoints tels que :

$$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$$

et on fixe $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors on a :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} u_i \right) .$$

Démonstration. Admis. □

✌ **Remarque XXVIII.7.** On en déduit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) les familles $(u_i)_{i\in I_j}$ sont sommables ;

(ii) la famille $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable.

➠ **Exemple XXVIII.3.**

— On peut retrouver la somme de la famille $(x^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ en observant que $\mathbb{Z} = \mathbb{N}\sqcup\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n<0\}$ et en appliquant le théorème XXVIII.8.

— Une partition classique (dite *diagonale*) de $\mathbb{N}^2$ est la suivante :

$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n=0}^{\infty}\{(p,q)\in\mathbb{N}^2\,|\,p+q=n\} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty}\{(k,n-k)\,|\,k\in[\![0,n]\!]\}\,.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{p!q!(p+q+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!(n+1)}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\\ &= \frac{e^2-1}{2}\,.\end{aligned}$$

✍ **Exercice XXVIII.1.** Soit $x\in[0,1[$; démontrer que :

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}}\,.$$

➥ **Correction :** *Commençons par remarquer que l'égalité*

$$\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{p=0}^{\infty}\{(2q+1)2^p\,|\,q\in\mathbb{N}\}$$

décrit une partition de $\mathbb{N}^*$ *(penser à la valuation 2–adique). De fait :*

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x} &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} x^{(2q+1)2^p} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} x^{2^p}\left(\sum_{q=0}^{\infty} x^{2^p 2q}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} x^{2^p}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(x^{2^{p+1}}\right)^q\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}}\,.\end{aligned}$$

Un cas particulier absolument fondamental du théorème XXVIII.8 est celui où l'ensemble I est un produit cartésien $A \times B$. En effet, on a dans ce cas :

$$I = \bigsqcup_{a\in A} \{a\} \times B = \bigsqcup_{b\in B} A \times \{b\}\,.$$

Ceci nous permet de démontrer le résultat suivant, souvent attribué au mathématicien italien Guido Fubini (1879—1943), spécialiste du calcul intégral.

Corollaire XXVIII.8.a (Fubini)**.** Soit $(u_{a,b})_{(a,b)\in A\times B}$ une famille de réels positifs. Alors :

$$\sum_{(a,b)\in A\times B} u_{a,b} = \sum_{a\in A}\left(\sum_{b\in B} u_{a,b}\right) = \sum_{b\in B}\left(\sum_{a\in A} u_{a,b}\right)\,.$$

➠ **Exemple XXVIII.4.** Soit $x \in [0,1[$; alors par théorème de Fubini (corollaire XXVIII.8.a) on a :

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} x^{p+q} &= \sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} x^p x^q\right) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{N}} x^p\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} x^q\right) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{N}} x^p\left(\sum_{q=0}^{\infty} x^q\right) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{N}} x^p \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x}\sum_{p\in\mathbb{N}} x^p \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}\,.\end{aligned}$$