

# Chapitre XXV

## Espaces préhilbertiens réels

### 1. Produits scalaires

#### a) C'est quoi ?

**Définition XXV.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v ; on appelle **produit scalaire** sur  $E$  toute application  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

(A)  $\phi$  est une **forme bilinéaire**, i.e :

$$\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \phi(x + \lambda y, z) = \phi(x, z) + \lambda \phi(y, z)$$

et

$$\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \phi(z, x + \lambda y) = \phi(z, x) + \lambda \phi(z, y) ;$$

(B)  $\phi$  est **symétrique**, i.e :

$$\forall x, y \in E, \quad \phi(x, y) = \phi(y, x) ;$$

(C)  $\phi$  est **définie**, i.e :

$$\forall x \in E, \quad (\phi(x, x) = 0) \Rightarrow (x = 0) ;$$

(D)  $\phi$  est **positive**, i.e :

$$\forall x \in E, \quad \phi(x, x) \geq 0 .$$

**Notation.** Le produit scalaire sur un  $\mathbb{R}$ -e.v  $E$  de deux vecteurs  $x, y \in E$  sera souvent noté  $\langle x, y \rangle$ ,  $(x | y)$  ou  $x \cdot y$ .

#### ▣ Exemple XXV.1.

— Sur  $E = \mathbb{R}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit le **produit scalaire canonique** de deux vecteurs  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  comme :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k .$$

Cette formule définit bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$  dont la définition coïncide avec celle vue en sciences appliquées pour les dimensions 2 et 3. Notons

également que si l'on identifie  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  on a la formule :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = x^\top y.$$

— Sur  $E = \mathcal{C}^0([a, b])$ , on a le produit scalaire suivant :

$$\phi : (f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

✂ **Remarque XXV.1.** Si  $x \in E$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle x, 0 \rangle &= \langle x, 2 \cdot 0 \rangle \\ &= 2 \langle x, 0 \rangle \end{aligned}$$

et donc  $\langle x, 0 \rangle = 0 = \langle 0, x \rangle$ .

✎ **Exercice XXV.1.** Démontrer que l'application suivante est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \text{Tr}(A^\top B). \end{aligned}$$

**Définition XXV.2.** On appelle **espace préhilbertien réel** la donnée d'un couple  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , où :

- $E$  est un  $\mathbb{R}$ -e.v ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

Si de plus  $E$  est de dimension finie, on parle d'**espace euclidien**.

▮ **Exemple XXV.2.** L'exemple précédent met en exergue une structure d'espace préhilbertien réel sur  $\mathcal{C}^0([a, b])$  une structure d'espace euclidien sur  $\mathbb{R}^n$ .

✂ **Remarque XXV.2.** Lorsque la donnée du produit scalaire sera sous-entendue/"évident", nous l'omettrons.

✎ **Exercice XXV.2.** Démontrer que l'application suivante induit sur  $\mathbb{R}_n[X]$  une structure d'espace euclidien :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

## b) Inégalité de Cauchy–Schwarz

L'inégalité qui suit est nommée en l'honneur du mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789—1857) et de son confrère allemand Hermann Amandus Schwarz (1843—1921), qu'il serait de bon ton de ne pas confondre avec Laurent Schwartz (mathématicien français, 1915—2002).

**Proposition XXV.1** (Cauchy–Schwarz). Soit  $E$  un espace préhilbertien réel ; alors pour tous  $x, y \in E$  on a :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

*Démonstration.* Commençons par remarquer que si  $y = 0$ , la proposition est relativement aisée à démontrer (même en cas d'électroencéphalogramme plat). Dans le cas contraire, remarquons que si  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a :

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle .$$

Nous avons donc la un trinôme du second degré en  $\lambda$  de signe constant (positif) : son discriminant est donc négatif ou nul, *i.e*

$$4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

ce qui nous livre l'inégalité désirée.

Concernant le cas d'égalité, ce dernier se produit si et seulement si le discriminant *supra* est nul, et donc si et seulement si notre trinôme admet une racine double, *i.e* un réel  $\alpha$  tel que :

$$\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = 0 .$$

Par caractère défini du produit scalaire, on a donc que  $x + \alpha y = 0$ , d'où le résultat.  $\square$

**Exemple XXV.3.** Nous pouvons appliquer ce résultat aux produits scalaires vus dans le paragraphe précédent, obtenant les inégalités suivantes :

$$- \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right) ;$$

$$- \forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b]),$$

$$\left( \int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(t)^2 dt \right) \left( \int_a^b g(t)^2 dt \right) ;$$

$$- \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

$$\text{Tr}(A^\top B)^2 \leq \text{Tr}(A^\top A) \text{Tr}(B^\top B) .$$

**Exercice XXV.3.** On note  $\ell^2(\mathbb{N})$  l'ensemble des séries  $\sum u_n$  de nombres réels telles que  $\sum u_n^2$  converge.

1. Démontrer que  $\ell^2(\mathbb{N})$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre commutative.
2. Établir que l'application suivante définit un produit scalaire sur  $\ell^2(\mathbb{N})$  :

$$(u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n .$$

### c) Norme euclidienne

**Définition XXV.3.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel ; on appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $E$  la fonction :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} . \end{aligned}$$

▮ **Exemple XXV.4.**

— Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ; alors la norme de  $x$  associée au produit scalaire canonique est :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} ;$$

— de même, si  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ , on pose :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} .$$

Il s'agit de la norme associée au produit scalaire vu précédemment sur cet espace.

✂ **Remarque XXV.3.** Notons (avec soulagement) que la norme associée à un produit scalaire est bien définie par positivité de ce dernier.

✎ **Exercice XXV.4.** Exprimer à l'aide des coefficients de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sa norme associée au produit scalaire  $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^\top B)$ .

**Proposition XXV.2.** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et soit  $x, y \in E$ . Alors :

- (i)  $\|x\| \geq 0$  ;
- (ii)  $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$  ;
- (iii)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  **[homogénéité]** ;
- (iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  **[inégalité triangulaire]**.

*Démonstration.* Tout est trivial sauf l'inégalité triangulaire, qui découle de l'inégalité de Cauchy–Schwarz (proposition [XXV.1](#)) comme suit :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 . \end{aligned}$$

□

✎ **Exercice XXV.5.** En s'inspirant des résultats analogues vus dans les chapitres [III](#) et [VI](#), démontrer que si  $x, y$  sont deux points d'un espace préhilbertien réel on a :

$$\|x - y\| \geq | \|x\| - \|y\| | .$$

✂ **Remarque XXV.4.**

— Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire se produit lorsque il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz, *i.e* si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

- Muni de la norme associée à un espace préhilbertien réel  $E$ , il nous est possible de reformuler l'inégalité de Cauchy–Schwarz (proposition **XXV.1**) de la façon suivante :

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

On en déduit que, si  $x, y \neq 0$  :

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [-1, 1],$$

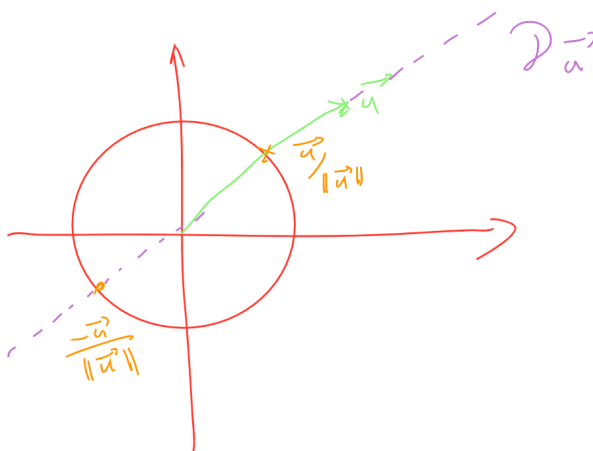
ce qui indique que la quantité suivante, appelée **écart angulaire** entre  $x$  et  $y$ , est dans  $[0, \pi]$  :

$$\theta_{x,y} = \arccos \left( \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right) \in [0, \pi].$$

En dimension 2 ou 3, ceci coïncide avec la notion éponyme vue en sciences appliquées.

**Définition XXV.4.** Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**.

✌ **Remarque XXV.5.** Un vecteur non nul  $u$  d'un espace préhilbertien réel est colinéaire à exactement deux vecteurs unitaires :  $\frac{u}{\|u\|}$  et  $-\frac{u}{\|u\|}$ . Notons que ce résultat n'est vrai que parce que nous travaillons sur des  $\mathbb{R}$ -e.v.



De plus, **en dimension 2**, si l'on pose  $(x, y) = \frac{u}{\|u\|}$  on a naturellement  $x^2 + y^2 = 1$ , ce qui entraîne qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \cos(\theta)$  et  $y = \sin(\theta)$ . On en déduit que l'on peut écrire  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ , avec  $r = \|u\|$ . Le couple  $(r, \theta)$  détermine le vecteur  $u$ ; on parle de **coordonnées polaires** de ce dernier.

#### d) Distance euclidienne

**Définition XXV.5.** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel ; on appelle **distance euclidienne** sur  $E$  l'application

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \mapsto \|y - x\|.$$

▮► **Exemple XXV.5.** On retrouve sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  la notion de distance vues en sciences physiques et de l'ingénieur.

**Proposition XXV.3.** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et soient  $x, y, z \in E$ . Alors :

- (i)  $d(x, y) \geq 0$  ;
- (ii)  $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$  ;
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$  ;
- (iv)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

*Démonstration.* Tout ceci découle trivialement des propriétés de la norme euclidienne. □

✎ **Exercice XXV.6.** Soit  $f : x \mapsto x$  et  $g : x \mapsto x^2$ . Déterminer  $d(f, g)$  dans  $\mathcal{C}^0([0, 1])$ .

## e) Formulaire

Nous concluons ce paragraphe par une compilation de formules usuelles, dont la démonstration est laissée à la discrétion du lecteur, qui se révéleront sans nul doute fort utiles en pratique. Pour tout espace préhilbertien réel  $E$  et tous  $x, y \in E$ , on a :

(i)

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 ;$$

(ii)

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 ;$$

(iii)

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) ;$$

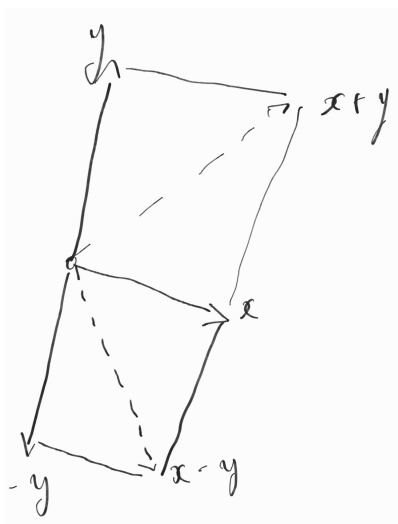
(iv)

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) ;$$

(v)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

Les égalités (iii) et (iv) sont appelées **formules de polarisation** et établissent le fait que la donnée d'un produit scalaire est équivalente à celle de sa norme euclidienne associée. Le point (v) est connu sous le nom **d'identité du parallélogramme** et peut être visualisée géométriquement en dimension 2 (*cf. infra*).



## 2. Orthogonalité

On fixe dans ce paragraphe un espace préhilbertien réel  $E$ .

### a) Vecteurs orthogonaux

**Définition XXV.6.** Deux vecteurs  $x, y \in E$  sont dits **orthogonaux** si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Notation.** Si  $x$  et  $y$  sont orthogonaux, on notera  $x \perp y$ .

#### Exemple XXV.6.

- Les vecteurs  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  sont orthogonaux dans  $\mathbb{R}^2$ ;
- les fonctions  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto x$  sont orthogonales dans  $\mathcal{C}^0([-1, 1])$  (mais pas dans  $\mathcal{C}^0([0, 1])$ ).

#### Remarque XXV.6.

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de  $E$ . Réciproquement, si  $x \in E$  est orthogonal à tout vecteur de  $E$ , alors  $\langle x, x \rangle = 0$  et donc  $x = 0$ .
- Comme le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique on a, pour tous  $x, y \in E$ ,  $(x \perp y) \Leftrightarrow (y \perp x)$ .
- Si  $x, y \neq 0$  sont orthogonaux,  $\theta_{x,y} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ .

#### Exercice XXV.7. Soit $E$ un espace euclidien.

1. Pour  $a \in E$ , montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_a : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle a, x \rangle \end{aligned}$$

est une forme linéaire.

2. Démontrer que  $a \mapsto \varphi_a$  réalise un isomorphisme (canonique) de  $E$  vers son dual  $E^*$ .

➔ **Correction :**

1. *Trivial*
2. On vérifie que  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$  car 0 est le seul vecteur orthogonal à tout élément de  $E$ . L'application  $\varphi$  est donc injective, ergo bijective car  $\dim(E) = \dim(E^*)$ .

**Définition XXV.7.** Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est dite **orthogonale** si :

$$\forall (i, j) \in I^2, (i \neq j) \Rightarrow (x_i \perp x_j).$$

Si de plus les  $x_i$  sont tous unitaires, on parle de **famille orthonormée** (ou ortho-normale).

✂ **Remarque XXV.7.** Une famille  $(x_i)_{i \in I} \in E^I$  est donc orthonormée si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in I^2, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

▣ **Exemple XXV.7.**

- La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est orthonormée pour le produit scalaire canonique.
- La famille  $(x \mapsto x^3, x \mapsto 1, x \mapsto x^7)$  n'est pas orthogonale dans  $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ .

**Proposition XXV.4.** Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre.

*Démonstration.* Soit  $(x_i)_{i \in I} \in E^I$  une famille orthogonale telle que  $\forall i \in I, x_i \neq 0$ . Alors, si il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  et  $i_1, \dots, i_n \in I$  tels que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{i_k} = 0$  on a, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{i_k}, x_{i_j} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\langle x_{i_k}, x_{i_j} \rangle}_{=0 \text{ si } k \neq j} \\ &= \lambda_j \|x_{i_j}\|^2 \end{aligned}$$

et donc  $\lambda_j = 0$ , ce qui livre le résultat voulu. □

Le théorème suivant est nommé en l'honneur du philosophe grec Pythagore de Samos (VI<sup>e</sup> siècle avant J.-C.), auquel on attribue le cas particulier du triangle en dimension 2. On trouve cependant des traces d'un résultat similaire à ce dernier plus de mille ans auparavant en Mésopotamie. Concernant la démonstration, la plus ancienne qui nous soit connue est due à Euclide (300 av. J.-C.).

**Théorème XXV.5** (Pythagore).

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille **orthogonale** de vecteurs de  $E$ . Alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

☞ **Remarque XXV.8.** Si  $n = 2$ , la réciproque est vraie : en effet, pour toute famille  $(x, y) \in E^2$  telle que  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ , on a :

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc  $(x, y)$  est orthogonale. Ceci devrait rappeler au lecteur quelques souvenirs collégiens.

*Démonstration.* Calculons :

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{\langle x_k, x_j \rangle}_{=0 \text{ si } j \neq k} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle x_k, x_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.\end{aligned}$$

□

## b) Orthogonal d'une partie

**Définition XXV.8.** Soit  $A \subset E$  une **partie** de  $E$ . On appelle **orthogonal** de  $A$  l'ensemble

$$A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

☞ **Remarque XXV.9.** L'orthogonal de  $A$  est donc l'ensemble des vecteurs de  $E$  orthogonaux à tous ceux de  $A$ .

▮ **Exemple XXV.8.** Posons  $A = \{(1, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$ . Alors, pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , on a :

$$\begin{aligned}(a, b, c) \in A^\perp &\Leftrightarrow \langle (1, 1, -1), (a, b, c) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a + b - c = 0\end{aligned}$$

et donc  $A^\perp$  est l'hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x + y - z = 0$ . Une base de cet hyperplan est  $((1, 0, 1), (1, 1, -2))$ .

▮ **Exercice XXV.8.** Déterminer l'orthogonal du plan d'équation  $x + 2y - z = 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition XXV.6.** Soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Alors :

- (i)  $E^\perp = \{0\}$  et  $\{0\}^\perp = E$ ;
- (ii)  $A^\perp$  est un s-e.v de  $E$ ;
- (iii)  $(A \subset B) \Rightarrow (B^\perp \subset A^\perp)$ ;
- (iv)  $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$ ;
- (v)  $A \subset (A^\perp)^\perp$ .

*Démonstration.*

- (i) Immédiat.
- (ii)  $A^\perp$  est bien une partie de  $A$  contenant 0. De plus, pour tous  $x, y \in A^\perp$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a :

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \langle x + \lambda y, a \rangle &= \langle x, a \rangle + \lambda \langle y, a \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc  $x + \lambda y \in A^\perp$ , d'où le résultat.

- (iii) Supposons  $A \subset B$  et fixons  $x \in B^\perp$ . Alors, pour tout  $y \in B$ ,  $\langle x, y \rangle = 0$  et donc, comme  $A \subset B$ , ceci reste vrai pour tout  $y \in A$ . *In fine*,  $B^\perp \subset A^\perp$ .
- (iv) Comme  $A \subset \text{Vect}(A)$ , on par le point précédent que  $\text{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$ . Réciproquement, tout vecteur orthogonal à  $A$  sera (par bilinéarité du produit scalaire) orthogonal à toute combinaison linéaires d'éléments de cet ensemble, d'où l'inclusion réciproque.
- (v) Soit  $x \in A$  et  $y \in A^\perp$ . Alors  $\langle x, y \rangle = 0$  et donc  $x \perp y$ , ce qui entraîne que  $x \in (A^\perp)^\perp$ .

□

### c) Algorithme de Gram–Schmidt

Le procédé exposé ici a été publié en 1883 par le mathématicien danois Jørgen Pedersen Gram (1850—1916) avant d'être reformulé par Erhard Schmidt (allemand, 1876—1959). On trouve un procédé analogue dans les écrits de Pierre–Simon de Laplace (mathématicien, astronome et physicien français, 1749—1827). Il permet, étant donné une base d'un espace euclidien, de la transformer en une base orthogonale ou orthonormée de ce même espace (on parle parfois de **procédé d'orthonormalisation**).

**Théorème XXV.7** (Gram–Schmidt).

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une famille libre  $E$ . Alors il existe une famille **orthogonale**  $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$  de  $E$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

*Démonstration.* Posons  $u_1 = e_1$ , puis pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  :


$$u_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle e_{k+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i.$$


Nous démontrons ensuite par récurrence sur  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  que :

- (i)  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$  ;
- (ii)  $u_k \in \{u_1, \dots, u_{k-1}\}^\perp$  pour  $k \geq 2$ .
  - $k = 1$  : trivial.
  - Supposons la propriété vraie au rang  $k$  ; le premier point est alors vérifié au rang  $k+1$  par construction de  $u_{k+1}$ , il ne nous reste donc plus qu'à vérifier la condition d'orthogonalité. Pour ce faire, fixons  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$  et notons que :

$$\begin{aligned} \langle u_{k+1}, u_j \rangle &= \left\langle e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle e_{k+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, u_j \right\rangle \\ &= \langle e_{k+1}, u_j \rangle - \sum_{i=1}^k \frac{\langle e_{k+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=0 \text{ si } i \neq j} \\ &= \langle e_{k+1}, u_j \rangle - \frac{\langle e_{k+1}, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \|u_j\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

 **Remarque XXV.10.** L'expression des vecteurs  $u_k$  peut être obtenue par analyse-synthèse, en cherchant  $u_{k+1}$  sous la forme  $e_{k+1} + \omega$ , avec  $\omega \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ .

 **Exemple XXV.9.** Il est possible d'orthogonaliser la base  $((1, 0), (1, 1))$  de  $\mathbb{R}^2$  pour le produit scalaire canonique grâce à ce procédé : on obtient  $u_1 = (1, 0)$  et

$$\begin{aligned} u_2 &= (1, 1) - \frac{\langle (1, 1), (1, 0) \rangle}{\|(1, 0)\|^2} \cdot (1, 0) \\ &= (1, 1) - (1, 0) \\ &= (0, 1). \end{aligned}$$

**Corollaire XXV.7.a.** Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

*Démonstration.* Nous savons par le théorème de la base incomplète (XIX.2) qu'un tel espace admet une base. Via l'algorithme de Gram-Schmidt (théorème XXV.7), nous obtenons une base orthogonale de  $E$ , notée  $(u_1, \dots, u_n)$ . Une base orthonormée de  $E$  est alors donnée par la famille  $\left( \frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right)$ . □

 **Exercice XXV.9.** Déterminer une base orthonormée de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

✂ **Remarque XXV.11.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base **orthonormée** d'un espace euclidien  $E$  et soit  $x, y \in E$ ; il existe de fait une unique famille  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  de réels telle que  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ . Avec ces notations, il est aisé de vérifier les formules (utiles) suivantes :

(i)

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = \langle x, e_i \rangle ;$$

(ii)

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i ;$$

(iii)

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

✂ **Remarque XXV.12.** Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'application  $x \mapsto \langle x, e_i \rangle$  est en fait la forme coordonnée  $e_i^*$ .

### 3. — Projecteurs orthogonaux

On fixe dans ce paragraphe un espace préhilbertien réel  $E$ .

#### a) Supplémentaire orthogonal d'un s-e.v

**Proposition XXV.8.** Soit  $F$  un s-e.v de  $E$  de dimension finie. Alors :

$$F \oplus F^\perp = E.$$

*Démonstration.* On vérifie que  $F \cap F^\perp = \{0\}$ . De plus, si  $x \in E$  et que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $F$  alors

$$y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \in F$$

et pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a :

$$\begin{aligned} \langle x - y, e_j \rangle &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} \\ &= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

In fine, on a :

$$x = \underbrace{x - y}_{\in F^\perp} + \underbrace{y}_{\in F}$$

d'où le résultat. □

**Vocabulaire.**  $F^\perp$  est appelé **supplémentaire orthogonal** de  $F$ .

☞ **Remarque XXV.13.** Il y a unicité du supplémentaire orthogonal.

**Proposition XXV.9.** Soit  $E$  un espace euclidien et soit  $F$  un s-e.v de  $E$ . Alors ;

- (i)  $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$  ;
- (ii)  $(F^\perp)^\perp = F$ .

*Démonstration.*

- (i) Découle immédiatement de la proposition **XXV.8**.
- (ii) Nous avons vu (proposition **XXV.6**) que  $F \subset (F^\perp)^\perp$ . De plus, on déduit du point précédent que  $\dim((F^\perp)^\perp) = \dim(F)$ , ce qui permet de conclure. □

▮ **Exemple XXV.10.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , le supplémentaire orthogonal d'un plan est l'unique droite vectorielle perpendiculaire (au sens vu dans le secondaire) à ce dernier.

**Vocabulaire.** Tout vecteur unitaire engendrant le supplémentaire orthogonal à un hyperplan est appelé **vecteur normal** à ce dernier.

☞ **Remarque XXV.14.** Soit  $H$  un hyperplan et soit  $a$  un vecteur normal à  $H$ . Alors si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$  dans laquelle les coordonnées de  $a$  sont  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  on a :

$$\begin{aligned} \forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \quad x \in H &\iff \langle x, a \rangle = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une équation de l'hyperplan à l'aide des coordonnées de son vecteur normale dans une base orthonormée.

**Définition XXV.9.** Soit  $F$  un s-e.v de  $E$  de dimension finie ; alors on appelle **projecteur orthogonal** sur  $F$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

☞ **Remarque XXV.15.**

— Pour tout  $x, y \in E$  on a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- (i)  $y = p(x)$  ;
- (ii)  $(y \in F) \wedge (x - y \in F^\perp)$ .

— Soit  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_k)$  une base orthogonale de  $F$ . On a alors (cf. démonstration de la proposition **XXV.6**), pour  $x \in E$  et si  $p$  est le projecteur orthogonal sur  $F$  :

$$p(x) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle x, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i.$$

Toute similarité avec les formules apparaissant dans l'algorithme de Gram–Schmidt (théorème **XXV.7**) est violemment non fortuite. Similairement, si  $F = \mathcal{D}_e$  est une droite, on a :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \frac{\langle x, e \rangle}{\|e\|^2} e,$$

formule qui devrait titiller les souvenirs du lecteur relatifs aux sciences appliquées. Pour finir, on peut obtenir le projecteur  $p'$  sur l'hyperplan  $H = \mathcal{D}_e^\perp$  via :

$$\forall x \in E, \quad p'(x) = x - \frac{\langle x, e \rangle}{\|e\|^2} e.$$

## b) Distance à un s–e.v

**Définition XXV.10.** Soit  $F$  un s–e.v de  $E$  et soit  $x \in E$ . On appelle **distance de  $x$  à  $F$**  la quantité

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y) \mid y \in F\}.$$

☞ **Remarque XXV.16.** Cette borne inférieure existe bien. Pourquoi ?

☛ **Exemple XXV.11.** On se place dans l'espace  $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$  muni du produit scalaire  $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$  et on pose :

$$F = \text{Vect} \left\{ x \mapsto \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \mid N \in \mathbb{N} \right\}.$$

On peut alors vérifier par inégalité de Taylor–Lagrange (proposition **XX.20**) que  $d(\exp, F) = 0$  et pourtant  $\exp \notin F$ . Ceci entraîne par ailleurs que  $d(\exp, \mathbb{R}[x]) = 0$ .

**Proposition XXV.10.** Soit  $F$  un s–e.v de  $E$  de dimension finie, soit  $x \in E$  et soit  $p$  le projecteur orthogonal sur  $F$ . Alors on a :

$$\forall y \in F, \quad d(x, y) \geq d(x, p(x))$$

avec égalité si et seulement si  $y = p(x)$ .

☞ **Remarque XXV.17.** Cela signifie que le point  $p(x)$  est l'unique vecteur de  $F$  minimisant la distance à  $x$  et que :

$$d(x, F) = d(x, p(x)).$$

*Démonstration.* Soit  $y \in F$  ; alors :

$$\begin{aligned} d(x, y)^2 &= \|y - x\|^2 \\ &= \|(y - p(x)) + (p(x) - x)\|^2 \\ &= \|y - p(x)\|^2 + \|p(x) - x\|^2 \end{aligned}$$

d'après le théorème de Pythagore (XXV.5). Ceci se reformule :

$$d(x, y)^2 = d(y, p(x))^2 + d(x, p(x))^2$$

d'où le résultat. □

✘ **ATTENTION** : Le projeté orthogonal sur  $F$  est bien défini car  $F$  est de dimension finie.

▮ **Exemple XXV.12.**

— Si  $H$  est un hyperplan d'un espace **euclidien**  $E$  et que  $e \in E$  est tel que  $H^\perp = \mathcal{D}_e$  (on dit que  $e$  est **normal** à  $H$ ), on a :

$$\forall x \in E, \quad d(x, H) = \frac{|\langle x, e \rangle|}{\|e\|}.$$

— Si  $e \in E$  alors (calcul en exercice) :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad d(x, \mathcal{D}_e) &= \left\| x - \frac{\langle x, e \rangle}{\|e\|^2} e \right\| \\ &= \frac{\sqrt{\|x\|^2 \|e\|^2 - \langle x, e \rangle^2}}{\|e\|}. \end{aligned}$$

✎ **Exercice XXV.10.** Calculer les quantité suivante :

$$(a) \quad \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (x - a \cos(x) - b \sin(x))^2 dx ; \quad (b) \quad \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$