

Chapitre XXIV

Probabilités

1. Notions liminaires

a) Univers

Ce cours sera axé autour de la notion d'**expérience aléatoire**, que nous définissons (informellement) comme une *expérience dont l'issue n'est pas déterminée à l'avance*. On pourra citer comme exemple le classique jet de dé(s), le remplissage d'un QCM, ...

Définition XXIV.1. On appelle **univers** d'une expérience aléatoire l'ensemble, traditionnellement noté Ω , de ses issues possibles.

✘ **ATTENTION** : nous nous limiterons cette année aux cas d'univers **finis**. Notons que cela ne signifie pas "petits"...

▣ Exemple XXIV.1.

- Dans le cas d'un jet de dé à 6 faces, l'univers est $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$;
- si on en lance deux, l'univers devient $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$;
- l'univers associé à un lancer de pièce ("pile ou face") est $\Omega = \{\text{pile, face}\}$;
- l'univers associé à une étape d'un jeu de chaises musicales à n personnes est $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket \times \mathfrak{S}_{n-1}$: il faut "choisir" le perdant, puis placer ses $n-1$ congénères sur les chaises restantes.

b) Événements

On fixe dans ce paragraphe un univers Ω **fini**.

Définition XXIV.2. On appelle **événement** toute partie de l'univers Ω .

▣ **Exemple XXIV.2.** Dans le cas de deux lancers "pile ou face" successifs, $\Omega = \{\text{pile, face}\}^2$ et l'événement "obtenir au moins une fois 'pile' " correspond à l'ensemble $\{(\text{pile, pile}), (\text{pile, face}), (\text{face, pile})\}$.

Vocabulaire. Plusieurs notions vues dans le chapitre ont un pendant probabiliste rendu explicite par la définition *supra*. Nous les résumons dans le tableau suivant, en fixant deux parties $A, B \subset \Omega$ et un élément $\omega \in \Omega$.

Objet ou propriété	Nom ensembliste	Nom probabiliste
A	partie	événement
ω	élément	issue
$\{\omega\}$	singleton	événement élémentaire
$\Omega \setminus A$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
\emptyset	ensemble vide	événement impossible
Ω	tout	événement certain
$A \cap B = \emptyset$	ensembles disjoints	événements incompatibles

▣► **Exemple XXIV.3.** Dans le cas de deux lancers "pile ou face" successifs, l'événement "obtenir au moins une fois 'pile' " est incompatible avec "n'obtenir que 'face' ".

Notation. Dans le cas des probabilités, il est courant et sans ambiguïté de noter \bar{A} l'événement contraire $\Omega \setminus A$.

Définition XXIV.3. On appelle **système complet d'événements** dans Ω toute famille (A_1, \dots, A_n) d'événements telle que :

- les A_i sont non impossibles (*i.e* non vides) ;
- les A_i sont deux à deux incompatibles (*i.e* deux à deux disjoints) ;
-

$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^n A_i.$$

✂ **Remarque XXIV.1.** Cela signifie que les parties $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ partitionnent (*cf.* chapitre V) l'ensemble Ω . En particulier, on a :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \exists ! i, \omega \in A_i.$$

▣► **Exemple XXIV.4.**

- Si A est un événement différent de \emptyset et Ω , alors (A, \bar{A}) est un système complet d'événements.
- Dans le cas du lancer successif de 14 dés à 6 faces, les événements A_i = "obtenir exactement i fois 1", pour $i \in \llbracket 0, 14 \rrbracket$, forment un système complet d'événements.

c) Variables aléatoires

Nous cherchons dans ce chapitre à modéliser une "quantité" X prenant des valeurs aléatoires, dépendant des événements d'un univers Ω . Mathématiquement parlant, nous formalisons ceci par la définition *infra*.

Définition XXIV.4. On appelle **variable aléatoire** sur Ω toute application $X : \Omega \rightarrow E$, avec E un ensemble. Si $E = \mathbb{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle ou complexe**.

☞ **Remarque XXIV.2.** L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X est fini car Ω l'est.

☛ **Exemple XXIV.5.** Lançons deux dés à 6 faces ; l'univers nous intéressant est alors $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. L'application

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

est alors une variable aléatoire sur Ω vérifiant $X(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$.

2. Espaces probabilisés finis

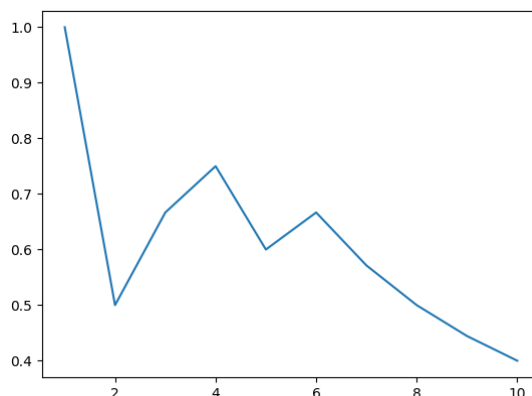
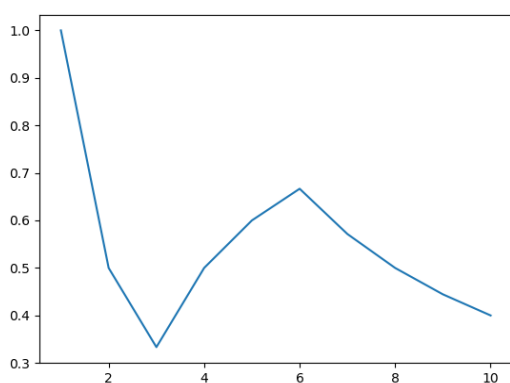
On fixe dans ce paragraphe un univers Ω **fini** non vide.

Considérons l'expérience aléatoire suivante : on lance une pièce de monnaie N fois (avec N "grand" et, n'en déplaise à H.P. Lovecraft, entier) et compte le nombre de fois où elle tombe sur "pile", que nous notons N_p . Intuitivement, il nous semble que le quotient $\frac{N_p}{N}$ (correspondant à la fréquence d'apparition de "pile") devrait, pour N suffisamment grand, être proche de $\frac{1}{2}$. Vérifions ceci en pratique, à l'aide du code python *infra*.

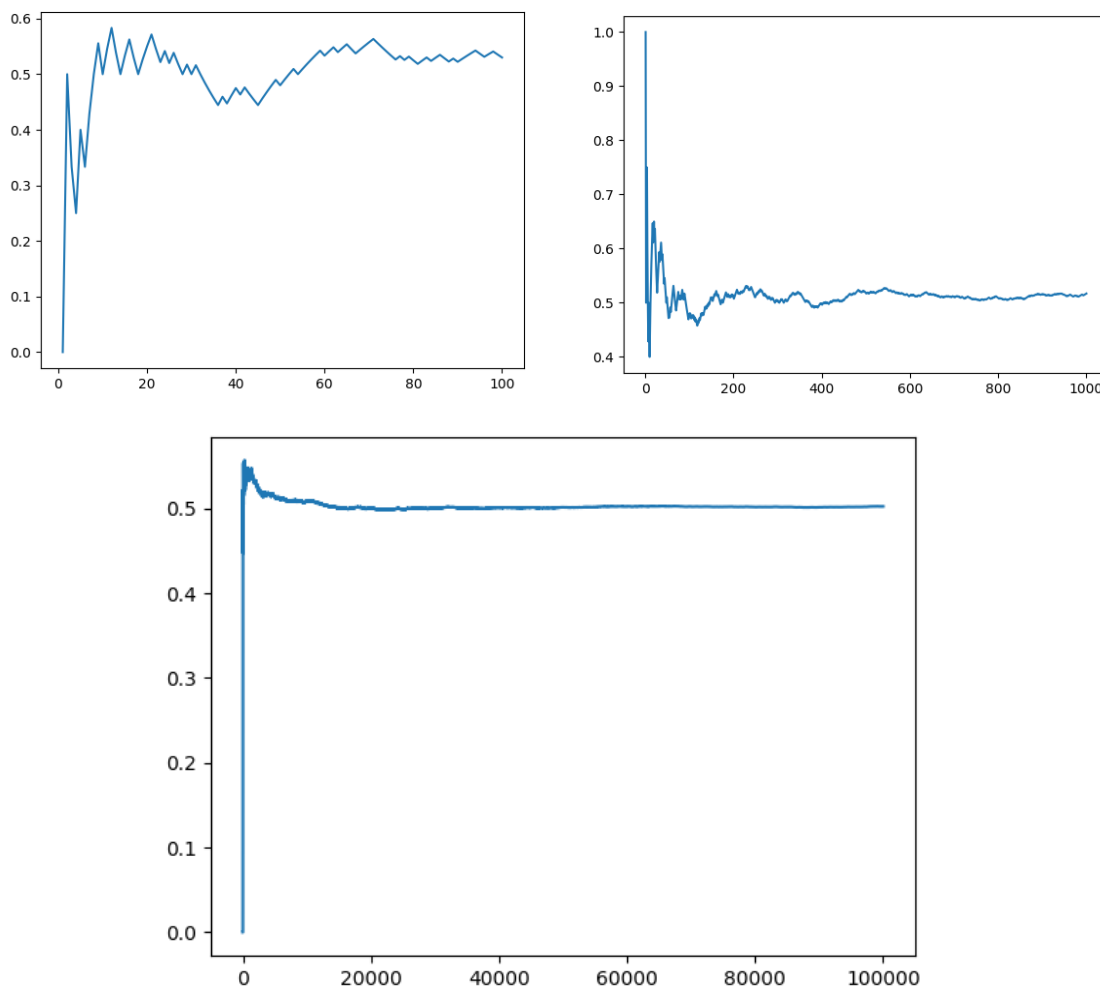
```
from numpy import *
from random import randint
from matplotlib.pyplot import *

def taux(N):
    S=0
    Y=[]
    for k in range(N):
        S+=randint(0,1)
        Y+=[S/(k+1)]
    plot(list(range(1,N+1)), Y)
    show()
```

On remarque que les tracés obtenus pour de petits nombres de répétitions de l'expérience accusent une grande variabilité entre deux réalisations ; par exemple pour $N = 10$ on peut obtenir les deux graphes suivants :



tandis qu'un grand nombre de répétitions a tendance à "lisser" le résultat, comme illustré *infra*.



Il semble donc en effet que la fréquence d'apparition de "pile" se stabilise, lorsque N tend vers l'infini, autour de la valeur $\frac{1}{2}$. Heuristiquement, nous avons la tentation d'avancer que la "chance" d'obtenir "pile" lors d'un tel lancer est de $\frac{1}{2}$; tentation à laquelle nous aller céder, non sans formaliser quelque peu notre cadre d'étude.

a) Notion de probabilité

Définition XXIV.5. On appelle **probabilité** sur l'univers Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- pour tous événements **incompatibles** A et B on a :

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Le couple (Ω, \mathbb{P}) est alors appelé **espace probabilisé** (fini).

☞ **Remarque XXIV.3.**

- Si A_1, \dots, A_n sont des événements deux à deux incompatibles, on a (par récurrence) :

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

- Une probabilité est caractérisée par ses valeurs en chaque événement élémentaire de Ω . En effet, si A est un événement, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) \\ &= \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}). \end{aligned}$$

✘ **ATTENTION** : ce raisonnement ne peut en aucun cas être généralisé au cas d'un univers infini.

Définition XXIV.6. On appelle **distribution de probabilités** sur un ensemble I toute famille **presque nulle** $(\lambda_i)_{i \in I}$ **de réels positifs** telle que :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

✎ **Remarque XXIV.4.**

- Notons que la somme *supra* est une somme finie.
 — Ceci signifie qu'une probabilité \mathbb{P} sur Ω est totalement déterminée par la donnée de la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$, et réciproquement.

▣ **Exemple XXIV.6.**

- La probabilité régissant un lancer de pièce de monnaie est caractérisée par $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = \frac{1}{2}$;
 — pour un lancer de dé à 6 faces, on a, pour $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$:

$$\mathbb{P}(\text{obtenir } i) = \frac{1}{6} ;$$

- le lecteur amateur de magouilles pourra se pencher sur le cas d'un dé pipé.

Proposition XXIV.1. Soit \mathbb{P} une probabilité sur Ω . Alors $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Démonstration. L'événement impossible étant incompatible avec lui-même (la chance ...), on a :

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \sqcup \emptyset) = 2\mathbb{P}(\emptyset)$$

d'où le résultat. □

✎ **Remarque XXIV.5.** Il est possible d'avoir un événement A tel que $\mathbb{P}(A) = 1$ et $A \neq \Omega$. Prenons par exemple un pièce truquée pour toujours tomber sur "pile" et A l'événement "obtenir pile". De même, $\mathbb{P}(\text{"obtenir face"}) = 0$ et pourtant l'événement mentionné n'est pas impossible.

Proposition/définition XXIV.7. Il existe une unique probabilité \mathbb{P} sur Ω telle que :

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\omega'\}).$$

Celle-ci est alors appelée **probabilité uniforme** sur l'univers Ω .

Démonstration. Procédons par analyse-synthèse : si \mathbb{P} est une telle probabilité alors, pour tout $\omega_0 \in \Omega$:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\Omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \text{card}(\Omega) \mathbb{P}(\{\omega_0\}) \end{aligned}$$

ergo

$$\mathbb{P}(\{\omega_0\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}.$$

En guise de synthèse, il nous suffit de remarquer que nous venons de définir une distribution de probabilités. \square

\heartsuit **Remarque XXIV.6.** Si \mathbb{P} est la probabilité uniforme sur Ω et A est un événement, il est aisé de vérifier que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

\clubsuit **Exercice XXIV.1.** Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 4 en lançant 3 dés à 6 faces ?

\blacktriangleright **Correction :** Cette expérience est régie par la probabilité uniforme \mathbb{P} sur $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$ car toutes ses issues sont équiprobables. Posons, pour $i \in \llbracket 1, 2, 3 \rrbracket$ l'événement $A_i =$ "obtenir exactement i 4"; alors :

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{\binom{3}{i} 5^{3-i}}{6^3}$$

le coefficient binomial correspondant au choix des jets où le 4 est obtenu et le 5^{3-i} aux choix des valeurs affichées par les autres dés. Par incompatibilité on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3) &= \frac{\binom{3}{1} 5^2}{6^3} + \frac{\binom{3}{2} 5}{6^3} + \frac{\binom{3}{3}}{6^3} \\ &= \frac{3 \times 25 + 3 \times 5 + 1}{216} \\ &= \frac{91}{216}. \end{aligned}$$

On fixe dans toute la suite de ce chapitre un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) **fini**.

b) Propriétés générales

Proposition XXIV.2 (Croissance). Soient A, B deux événements tels que $A \subset B$. Alors :

- (i) $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- (ii) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

Démonstration. Découle trivialement du fait que $B = A \sqcup (B \setminus A)$. □

Corollaire XXIV.2.a. Soit A un événement. Alors $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

✎ **Exercice XXIV.2.** Refaire l'exercice [XXIV.1](#) en utilisant le corollaire [XXIV.2.a](#).

Proposition XXIV.3. Soient A, B deux événements. Alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Démonstration. Découle, similairement au cas vu pour les cardinaux dans le chapitre [XVI](#), du fait que $A \cup B = (A \setminus A \cap B) \sqcup B$. □

✎ **Remarque XXIV.7.** De façon analogue à ce qui a été fait au chapitre [XVI](#), si A, B et C sont trois événements on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

et on obtient, dans le cas de n événements, un analogue à la formule du crible de Poincaré évoquée dans ce même chapitre.

✎ **Remarque XXIV.8.** On peut, similairement encore une fois à ce qui a été vu au chapitre [XVI](#), démontrer par une récurrence immédiate que pour tous événements A_1, \dots, A_n on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

✎ **Exercice XXIV.3.** On lance 3 dés à 6 faces. Déterminer la probabilité que l'on obtienne au moins un 6 ou que la somme des résultats obtenus soit supérieure ou égale à 14.

3. Probabilités conditionnelles

On fixe dans ce paragraphe un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) **fini**.

a) Qu'est-ce ?

Définition XXIV.8. Soient A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle **probabilité (conditionnelle) de A sachant B** la quantité

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Notation. $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}_B(A)$.

✂ **Remarque XXIV.9.** Heuristiquement, cette quantité peut être interprétée comme une fréquence : on "compte" le "taux" de cas d'apparition de A et B parmi ceux de B .

Convention. Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(B) = 0$, on s'autorisera à écrire $\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) = 0$.

▣ **Exemple XXIV.7.** Pour citer une blague connue (parmi les mathématiciens, au moins) : *alors qu'un statisticien passe un contrôle de sécurité dans un aéroport, on découvre une bombe dans sa valise. En garde à vue, il s'explique : "La probabilité d'avoir une bombe dans un avion est certes faible, mais la chance d'avoir deux bombes dans un même avion est infime. Ainsi, je fais ma part pour la sécurité de tous."* Ce statisticien confond probabilité et probabilité conditionnelle.

Proposition XXIV.4. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}_B(A) \end{aligned}$$

est une probabilité.

Démonstration. Laissez en exercice à notre lecteur favori. □

✎ **Exercice XXIV.4.** On considère une urne contenant r balles de couleur rouge, v balles de couleur verte et rien d'autre. On effectue deux tirages sans remise dans cette urne ; quelle est la probabilité de tirer deux balles vertes ?

➡ **Correction :** Notons $N = r + v$ le nombre de balles initialement dans l'urne et A_i (pour $i = 1, 2$) l'événement "le i -ième tirage est une balle verte". Il est clair, par uniformité de la situation que

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{v}{N}$$

et

$$\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \frac{v-1}{N-1}$$

ce qui entraîne que :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \frac{v(v-1)}{N(N-1)}.$$

b) Probabilités composées, probabilités totales

Théorème XXIV.5 (Formules des probabilités composées).

Soient A_1, \dots, A_n des événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right).\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de remplacer chaque probabilité conditionnelle par leur définition et de simplifier le produit. Le lecteur masochiste trouvera sans doute également plaisant de le démontrer par récurrence sur n (prendre garde à bien quantifier les événements dans l'hypothèse de récurrence dans ce cas). \square

☞ **Remarque XXIV.10.** Le lecteur se souvenant encore de sa terminale aura sans doute des flash-backs avec des arbres n'ayant rien à voir avec le Vietnam. Ceci est non fortuit.

✎ **Exercice XXIV.5.** Reprenons l'urne de l'exercice [XXIV.4](#) ; quelle est la probabilité de tirer les r balles rouges à la suite ?

Théorème XXIV.6 (Formules des probabilités totales).

Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements et soit B un événement. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i).$$

☞ **Remarque XXIV.11.** On rappelle que si $\mathbb{P}(A_i) = 0$, on s'autorise à écrire $\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i) = 0$. Youpi, c'est la fête.

Démonstration. Remarquons que :

$$\begin{aligned}B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cap B\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \cap B\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i).\end{aligned}$$

□

Exercice XXIV.6. On considère trois usines fabriquant des boulons destinés à un usage bien précis, comme par exemple boulonner des trucs :

- l'usine 1 fournit 10% de la production et accuse un taux de boulons défectueux de 3% ;
- l'usine 2 fournit 50% de la production et accuse un taux de boulons défectueux de 12% ;
- l'usine 3 fournit 40% de la production et accuse un taux de boulons défectueux de 5%.

Démontrer que 8,3% des boulons produits seront au final défectueux.

c) Formules de Bayes

Les résultats exposés dans ce paragraphe ont été formulés (sous une forme plus limitée) par le révérend anglais Thomas Bayes (~1702—1761) et retrouvés indépendamment par Pierre-Simon de Laplace (français, 1749—1827), mathématicien, astronome, physicien et homme politique de son (ses ?) état(s).

Théorème XXIV.7 (Bayes).

Soient A, B deux événements et soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements. On suppose que $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et les $\mathbb{P}(A_i)$ sont non nuls. Alors :

(i)

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} ;$$

(ii)

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)} .$$

Démonstration.

(i) On a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$$

d'où le résultat.

(ii) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$; alors, d'après le point (i), on a :

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Or, d'après la formule des probabilités totales (théorème **XXIV.6**) :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i).$$

ce qui permet de conclure. □

Exercice XXIV.7. En reprenant le cadre de l'exercice **XXIV.6**, démontrer qu'environ 72% des boulons défectueux proviennent de l'usine 2. *Quid* des usines 1 et 3?

4. Loi d'une variable aléatoire

a) La loi, c'est quoi ?

Commettons quelques crimes contre la rigueur ; pour $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire, $x \in E$ et $A \subset E$ on notera :

- $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$;
- $\{X = x\}$ ou $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$;
- $\{X \leq x\}$ ou $(X \leq x)$ l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ si " \leq " est une relation sur E .

Ceci signifie que nous pourrons par exemple chercher à calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \in A)$ de l'événement $X^{-1}(A)$; ces notations existent pour mettre l'accent que la partie intéressante de l'étude d'une variable aléatoire n'est pas celle de son mécanisme mais celle des valeurs qu'elle peut prendre, et avec quelle probabilité.

Définition XXIV.9. Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire ; on appelle **loi de X** l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(X \in A). \end{aligned}$$

Notation. Si X, Y sont deux variables aléatoires telles que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, on notera $X \sim Y$.

Remarque XXIV.12. La loi \mathbb{P}_X est caractérisée par la donnée de la distribution de probabilités $(\mathbb{P}_X(\{x\}))_{x \in E} = (\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$. Si l'on a peur des ensembles infinis (ce qui est triste), on peut remarquer que x parcourt en fait $X(\Omega)$.

Exemple XXIV.8. La loi de la somme X des résultats de deux dés à 6 faces est donnée par la tableau suivant.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Proposition XXIV.8. Soit X une variable aléatoire ; alors \mathbb{P}_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration. Il est rapide de vérifier que $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega)) = 1$. De plus, si A et B sont deux événements incompatibles de $X(\Omega)$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(A \sqcup B) &= \mathbb{P}(X \in A \sqcup B) \\ &= \mathbb{P}(X^{-1}(A \sqcup B)) \\ &= \mathbb{P}(X^{-1}(A) \sqcup X^{-1}(B)) \\ &= \mathbb{P}(X^{-1}(A)) + \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \\ &= \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

✂ **Remarque XXIV.13.**

- $X(\Omega)$ est donc lui aussi un univers (fini).
- Par définition de probabilité, si $A \subset E$ on a :

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

◇ Image d'une variable aléatoire par une application

Fixons une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow E$ et une application $f : E \rightarrow F$, E et F étant deux ensembles quelconques. Alors l'application $f \circ X : \Omega \rightarrow F$ est elle aussi une variable aléatoire ; on la note (malheureusement) $f(X)$. Oui, je sais, nous avons affaire ici à une véritable hérésie notatoire.

Si $A \in \mathcal{P}(F)$ on a par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{f(X)}(A) &= \mathbb{P}(f(X) \in A) \\ &= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A)) \\ &= \mathbb{P}_X(f^{-1}(A)). \end{aligned}$$

Proposition XXIV.9. Soient $X, Y : \Omega \rightarrow E$ deux variables aléatoires et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Alors :

$$(X \sim Y) \Rightarrow (f(X) \sim f(Y)).$$

Démonstration. Immédiat d'après le calcul *supra*. □

✂ **Exercice XXIV.8.** Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats d'un lancer de deux dés à 6 faces. Déterminer la loi de $X^2 - X$.

b) Zoologie des lois usuelles

◇ Loi uniforme

Définition XXIV.10. Soit E un ensemble **fini** non vide. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow E$ suit une **loi uniforme** si :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\text{card}(E)}.$$

Notation. La loi \mathbb{P}_X sera notée $\mathcal{U}(E)$ et on écrira $X \sim \mathcal{U}(E)$ pour indiquer que X suit une loi uniforme. Si $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, on écrira parfois $\mathcal{U}(n)$ au lieu de $\mathcal{U}(E)$.

📖 **Remarque XXIV.14.** Si $X \sim \mathcal{U}(E)$, on a, pour tout $A \subset E$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}.$$

\mathbb{P}_X est donc une probabilité uniforme¹ sur E .

▣ **Exemple XXIV.9.** Un lancer de dé équilibré à 6 faces suit la loi $\mathcal{U}(6)$.

🔗 **Exercice XXIV.9.** Soit $X \sim \mathcal{U}(n)$ pour $n \geq 0$. Démontrer que X^2 suit une loi uniforme sur un ensemble que l'on précisera.

◇ Loi de Bernoulli

La loi décrite dans ce paragraphe est nommée en l'honneur du mathématicien suisse Jacques (ou Jakob selon son humeur) Bernoulli (1654—1705), qu'il ne faut pas confondre avec son frère Jean (1667—1748, mathématicien et physicien) ou ses neveux Daniel (1700—1782, médecin, physicien et mathématicien), Nicolas (1695—1726, mathématicien) et (encore) Jean (1710—1790, mathématicien). La prochaine fois que l'un de vos enseignants vous cite un "résultat de Bernoulli", demandez lui "lequel ?" ; effet (et représsailles) assuré(es).

Définition XXIV.11. Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Notation. $X \sim \mathcal{B}(p)$

▣ **Exemple XXIV.10.**

- un lancer de pièce équilibrée suit une loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ (reste à décider qui de pile ou face correspond à 1 et qui correspond à 0) ;
- tirer une balle dans une urne en espérant qu'elle ait une couleur particulière suit une loi de Bernoulli.
- répondre à une question de QCM au hasard suit une loi de Bernoulli.

1. Surprenant, non ?

✂ **Remarque XXIV.15.**

- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, comme $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$ alors on a nécessairement $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- Les lois de Bernoulli servent à modéliser les expériences aléatoires ayant exactement deux issues (on parle souvent, arbitrairement, de "succès" et "échec", mais cela reste une question de point de vue). Le paramètre p est alors la probabilité de "succès" de notre expérience. Encore une fois, avoir un flash-back arboricole ne semble pas déplacé.

🔗 **Exercice XXIV.10.** Soit $A \subset \Omega$; démontrer que $\mathbb{1}_A$ est variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

◇ **Loi binomiale**

Définition XXIV.12. Soit $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$ suit une **loi binomiale** de paramètres n et p si :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Notation. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

✂ **Remarque XXIV.16.** La formule *supra* définit bien une probabilité sur $\llbracket 0, n \rrbracket$; en effet :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

🔗 **Exemple XXIV.11.** On considère une urne contenant N balles, dont r rouges ($r \leq N$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X correspondant au nombre de balles rouges tirées après n tirages **avec remise** suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{r}{N}\right)$.

✂ **Remarque XXIV.17.** La loi $\mathcal{B}(n, p)$ modélise le nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. D'ailleurs, $\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$, ce qui n'est pas anodin. Nous y reviendrons un peu plus tard (*cf.* proposition [XXIV.13](#)).

c) **Couples de variables aléatoires**

Dans tout ce paragraphe, on fixe deux ensembles E et F et deux variables aléatoires $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$. On appelle **couple associé à X et Y** la variable aléatoire suivante :

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow E \times F \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)).$$

Définition XXIV.13. La loi $\mathbb{P}_{(X, Y)}$ du couple (X, Y) est appelée **loi conjointe** de ce dernier. Les lois \mathbb{P}_X et \mathbb{P}_Y sont quant à elles appelées **lois marginales** du couple (X, Y) .

▣▣▣ **Exemple XXIV.12.** Le tableau *infra* décrit la loi conjointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1, 2\}^2$.

\mathbb{P}	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	0.1	0.3	0
$Y = 1$	0	0.2	0.2
$Y = 2$	0.1	0	0.1

On y lit par exemple que $\mathbb{P}((X, Y) = (0, 2)) = 0.1$. On peut déduire de ces données les lois marginales en sommant les probabilités rencontrées sur les lignes et colonnes comme suit.

\mathbb{P}	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	\mathbb{P}_Y
$Y = 0$	0.1	0.3	0	0.4
$Y = 1$	0	0.2	0.2	0.4
$Y = 2$	0.1	0	0.1	0.2
\mathbb{P}_X	0.2	0.5	0.3	\times

✂ **Remarque XXIV.18.** De façon générale, il est toujours possible de déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe : si $a \in X(\Omega)$ on a, en appliquant la formule des probabilités totales (théorème [XXIV.6](#)) au système complet d'événements $(Y = b)_{b \in Y(\Omega)}$:

$$\mathbb{P}(X = a) = \sum_{b \in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) = (a, b)).$$

Symétriquement, pour tout $b \in Y(\Omega)$ on a :

$$\mathbb{P}(Y = b) = \sum_{a \in X(\Omega)} \mathbb{P}((X, Y) = (a, b)).$$

✖ **ATTENTION** : il n'est par contre pas en général possible de reconstituer la loi conjointe à partir de la seule donnée des lois marginales. Se référer à l'exemple [XXIV.12](#) pour un contre-exemple.

Proposition/définition XXIV.14. Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$ et soit X une variable aléatoire ; on appelle **loi conditionnelle de X sachant A** la probabilité

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X|A} : \mathcal{P}(X(\Omega)) &\longrightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}(B | A). \end{aligned}$$

✂ **Remarque XXIV.19.** Soit $y \in Y(\Omega)$. Alors, par formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$:

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y | X = x) \mathbb{P}(X = x).$$

Ceci signifie que la donnée de \mathbb{P}_X et des lois conditionnelles de Y par rapport à X permet de reconstituer \mathbb{P}_Y (et symétriquement) ainsi que la loi conjointe $\mathbb{P}_{(X, Y)}$.

◇ **Généralisation aux n -uplets de variables aléatoires**

Tout ce que nous venons d'exposer concernant les couples de variables aléatoires se généralise aux n -uplets de telles objets. On conserve la notion de loi conjointe, et on dispose désormais de n lois marginales. Les lois conditionnelles peuvent également être définies de façon analogue à ce qui a été fait *supra*. Les calculs auront une fâcheuse tendance à impliquer des doubles, triples, quadruples sommes et autres joyeusetés.

5. Indépendance

a) Événements indépendants

Définition XXIV.15. Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Notation. $A \perp B$

✂ **Remarque XXIV.20.** Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors

$$A \perp B \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A).$$

▣ **Exemple XXIV.13.**

- Les résultats donnés par deux lancers de dés successifs sont indépendants ;
- il en va de même pour les résultats de tirages **avec remise** dans une urne.
- Nous invitons le lecteur à repenser au statisticien évoqué dans un paragraphe précédent et à ses bombes.

Proposition XXIV.10. Soient A, B deux événements indépendants. Alors A et \overline{B} sont indépendants.

Démonstration. Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap (B \sqcup \overline{B})) \\ &= \mathbb{P}((A \cap B) \sqcup (A \cap \overline{B})) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

□

Définition XXIV.16. On dit que des événements A_1, \dots, A_n sont **mutuellement indépendants** lorsque :

$$\forall J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in J} A_i \right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

✂ **Remarque XXIV.21.**

- Il est clair que l'indépendance mutuelle d'une famille implique l'indépendance deux à deux de ses éléments (prendre J de cardinal 2).
- La proposition **XXIV.10** se généralise au cas de n événement smutuellement indépendants.

✘ **ATTENTION :** la réciproque est cependant **fausse**. En effet, sur l'univers $\Omega = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ muni de sa probabilité uniforme, les événements $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{1, 4\}$ sont deux à deux indépendants tandis que :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

b) Variables aléatoires indépendantes

Définition XXIV.17. Soient X et Y deux variables aléatoires ; on dit que X et Y sont **indépendantes** si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

Notation. $X \perp\!\!\!\perp Y$

✂ **Remarque XXIV.22.** Dans ce cas on a, pour tout $y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}_{X|Y=y} = \mathbb{P}_X$.

▣ **Exemple XXIV.14.** Si on lance deux fois un dé, la variable aléatoire correspondant au premier résultat obtenu est indépendante de celle correspondant au second.

Proposition XXIV.11. Soient X, Y deux variables aléatoires **indépendantes**. Alors, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et tout $B \subset Y(\Omega)$ on a :

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

✂ **Remarque XXIV.23.** Ceci se reformule par :

$$\mathbb{P}_{(X, Y)}(A \times B) = \mathbb{P}_X(A)\mathbb{P}_Y(B).$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \mathbb{P}((X, Y) = (a, b)) \\
 &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \mathbb{P}(X = a, Y = b) \\
 &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \mathbb{P}(X = a) \mathbb{P}(Y = b) \\
 &= \left(\sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a) \right) \left(\sum_{b \in B} \mathbb{P}(Y = b) \right) \\
 &= \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B)
 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Corollaire XXIV.11.a. Soient X, Y deux variables aléatoires **indépendantes**. Alors pour tout $A \subset X(\Omega)$ et tout $B \subset Y(\Omega)$ les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Corollaire XXIV.11.b. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et soient $f : X(\Omega) \rightarrow E$ et $g : Y \rightarrow F$ deux applications. Alors $(f(X))$ et $(g(Y))$ sont indépendantes.

c) Généralisation

Définition XXIV.18. Des variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont dites **mutuellement indépendantes** (ou simplement **indépendantes**) si pour toute famille d'entiers deux à deux distincts $i_1, \dots, i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tous $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in X_{i_1}(\Omega) \times \dots \times X_{i_k}(\Omega)$ on a :

$$\mathbb{P}(X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_k} = x_{i_k}) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(X_{i_j} = x_{i_j}).$$

✂ **Remarque XXIV.24.** Une telle famille de variables peut modéliser une suite d'expériences aléatoires indépendantes. Ceci étant souvent modélisé par des arbres en Terminale...

Proposition XXIV.12. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors pour toute famille $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration. Trivial. □

Proposition XXIV.13. Soit $p \in [0, 1]$ et soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** de loi $\mathcal{B}(p)$. Alors :

$$X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Démonstration. On le fait par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ a déjà été traité et si on suppose tout ceci vrai au rang n alors pour toute famille X_1, \dots, X_{n+1} de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, en remarquant que la variable X_{n+1} est à valeurs dans $\{0, 1\}$ on a, par incompatibilité, indépendance puis hypothèse de récurrence, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0, X_1 + \dots + X_n = k) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_1 + \dots + X_n = k - 1) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0)\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = k) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = k - 1) \\ &= (1 - p) \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} + p \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1 - p)^{n-k+1} \\ &= \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) p^k (1 - p)^{n+1-k} \\ &= \binom{n+1}{k} p^k (1 - p)^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Si $k = 0$, on vérifie par un calcul rapide que tout fonctionne, ce qui permet de conclure. □

Proposition XXIV.14 (Lemme des coalitions). Soient $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E$ des variables aléatoires **mutuellement indépendantes**, soit $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et soient $f : E^m \rightarrow F$ et $g : E^{n-m} \rightarrow G$ deux applications. Alors :

$$f(X_1, \dots, X_m) \perp\!\!\!\perp g(X_{m+1}, \dots, X_n).$$

☞ **Remarque XXIV.25.** Ce résultat, dont la preuve est pénible, se généralise au cas de plus de deux "coalitions" (*i.e* applications).

▣ **Exemple XXIV.15.** Si X_1, \dots, X_{2n} sont mutuellement indépendante de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + X_3 + \dots + X_{2n-1}$ et $X_2 + X_4 + \dots + X_{2n}$ sont indépendantes et de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.