Chapitre XXIII

Groupe symétrique, déterminant

On fixe dans tout ce chapitre un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.⁻ Permutations d'un ensemble fini

a) Rappels et compléments

Nous avons eu l'occasion d'évoquer le **groupe symétrique** $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ (aussi noté S_n), pour $n \geq 1$, dans le chapitre VIII. Rappelons ici qu'il s'agit du groupe $\mathfrak{S}([\![1,n]\!],[\![1,n]\!])$ des bijections de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ vers lui–même (appelées **permutations**). Il s'agit d'un groupe fini possédant $n!$ éléments.

Notation. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$; nous utiliserons (temporairement) pour σ la notation "raccourcie" suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} .$$

➠ **Exemple XXIII.1.**

— $\mathfrak{S}_2$ est constitué des permutations $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

— De son côté, $\mathfrak{S}_3$ contient exactement 6 éléments, qui sont $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Notation. Pour alléger les calculs, nous nous autoriserons à noter, pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, la composition $\sigma \circ \tau$ simplement $\sigma\tau$.

➠ **Exemple XXIII.2.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

✖ **Attention :** attention à l'ordre ; une composition se lit de droite à gauche.

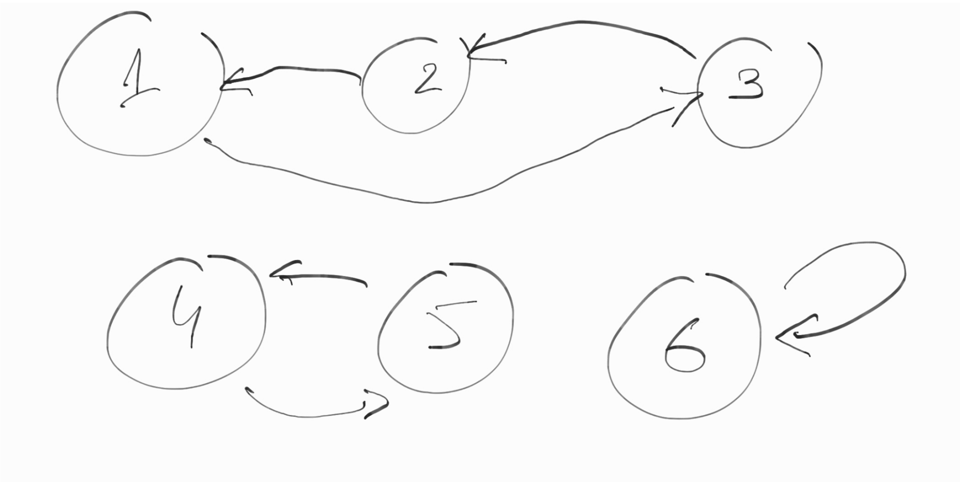
b) Cycles

Vocabulaire. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et soit $a \in [\![1, n]\!]$; on appelle **orbite de** a **selon** σ l'ensemble :

$$\{\sigma^k(a) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

où σ^k désigne la composée $\underbrace{\sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{k \text{ fois}}$.

➠ **Exemple XXIII.3.** L'orbite d'un point est donc l'ensemble des points atteignables en partant de ce dernier *via* itérations de la permutation σ. Nous représentons ci–dessous les différentes orbites de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.



✌ **Remarque XXIII.1.** Les orbites disjointes selon une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ partitionnent l'ensemble $[\![1, n]\!]$: il s'agit donc de classes d'équivalences.

Notation. La remarque *supra* nous autorise à envisager de noter une permutation comme la liste de ses orbites. Pour calculer l'image d'un point, il nous "suffira" alors de "retracer son chemin" parmi ces dernières. Par exemple, la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ se notera :

$$\sigma = (1\ 3\ 2)(4\ 5)(6)\,.$$

Il est aussi conventionnel d'éliminer les orbites triviales de cette notation pour gagner en place et en efficacité. Dans le cas présent, nous noterions :

$$\sigma = (1\ 3\ 2)(4\ 5)\,.$$

➠ **Exemple XXIII.4.** $(1\ 3\ 2)(3\ 2) = (1\ 3)\,.$

Définition XXIII.1. On appelle **cycle** toute permutation admettant une unique orbite non triviale. Cette orbite est alors appelée **support** du cycle et son cardinal **longueur** de celui–ci.

Exemple XXIII.5. Le cycle $(1\ 3\ 4) \in \mathfrak{S}_5$ est en fait la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Remarque XXIII.2.

— Cette notation est …cyclique ; par exemple $(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2)$.

— Si σ est un cycle de longueur k dans $\mathfrak{S}_n$ et que a est dans le support de σ, on a :

$$\sigma = (a\ \sigma(a)\ \sigma^2(a)\ \dots\ \sigma^{k-1}(a)).$$

Proposition XXIII.1. Deux cycles de supports disjoints commutent.

Démonstration. Ces deux cycles agissent (non trivialement) sur des ensembles disjoints : l'ordre de composition ne revêt donc aucune importance. □

Théorème XXIII.2.
Toute permutation différente de l'identité peut s'écrire de façon unique (à l'ordre près des facteurs) comme produit de cycles de supports disjoints.

Démonstration. Ce résultat est admis. □

Exemple XXIII.6. Pour déterminer la décomposition d'une permutation, il suffit de recopier ses orbites "dans l'ordre". Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 5).$$

c) Signature

Définition XXIII.2. On appelle **transposition** tout cycle de longueur 2.

Remarque XXIII.3.

— Les permutations sont donc exactement les $(i\ j) \in \mathfrak{S}_n$ avec $i < j$.

— Si $i, j \in [\![1, n]\!]$, alors $(i\ j)^{-1} = (j\ i) = (i\ j)$.

Proposition XXIII.3. Toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de transpositions.

Démonstration. Faisons le par récurrence sur $n \geq 1$.

— Pour $n = 1$, c'est trivial : tout élément de $\mathfrak{S}_1$ est produit d'exactement 0 transposition(s). Oui, nous en sommes toujours la après 395 pages de cours…

— Supposons la propriété vérifiée au rang n et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$; alors on a :

$$\sigma = (n+1\ \sigma(n+1))\sigma'$$

avec $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$. Ne reste alors qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence.

□

✖ **Attention :** il n'y a pas unicité. En effet, $(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3) = (2\ 3)(3\ 1)$. La parité du nombre de facteurs reste, par contre, constante pour une permutation donnée (cela est aisé à démontrer par l'absurde).

➠ **Exemple XXIII.7.** Si $a_1, \dots a_k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_k) = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\dots(a_{k-1}\ a_k)\,.$$

✖ **Attention :** si les orbites se lisent de gauche à droite, la composée, elle, se lit toujours de droite à gauche.

Théorème XXIII.4.
Il existe une unique application $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ telle que :
(i) pour toute transposition τ, $\varepsilon(\tau) = -1$;
(ii) ε est un morphisme de groupes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ vers $(\{-1, 1\}, \times)$.
Ce morphisme est appelé **signature** sur $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration. Admis. □

➠ **Exemple XXIII.8.** Pour calculer la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, on la décompose sous forme de produit de transpositions :

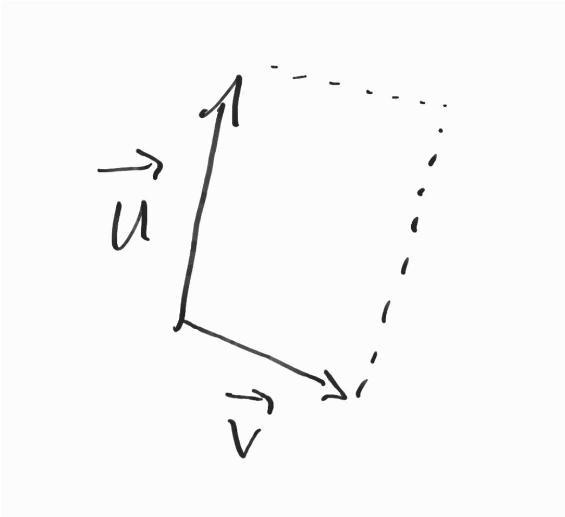
$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma) &= \varepsilon((1\ 2)(3\ 5)) \\ &= \varepsilon((1\ 2))\varepsilon((3\ 5)) \\ &= (-1)^2 \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

✌ **Remarque XXIII.4.** Le noyau de ε est appelé **groupe alterné** et noté $\mathfrak{A}_n$. Il s'agit d'un sous–groupe de $\mathfrak{S}_n$ de cardinal $\dfrac{n!}{2}$ si $n \geq 2$.

2.⁻ Formes multilinéaires alternées

a) Laïus géométrique et définition

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^2$, nous pouvons considérer l'aire **algébrique** $\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v})$ du parallélogramme engendré par ceux–ci.



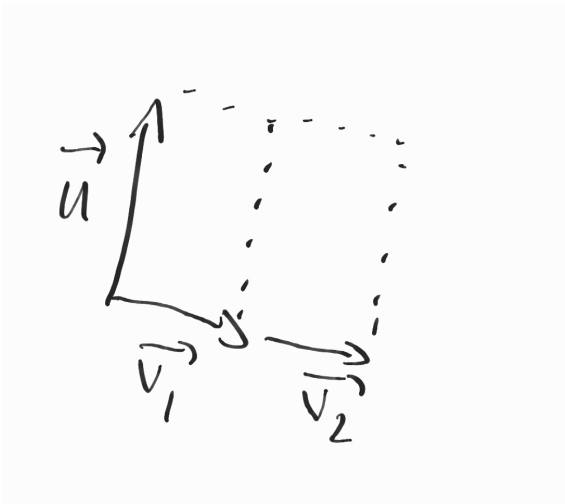
Si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$, nous avons la formule $\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc$. Les propriétés suivantes sont de plus vérifiées :

(i) $\mathscr{A}(\vec{v}, \vec{u}) = -\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v})$;

(ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathscr{A}(\vec{u}, \lambda\vec{u}) = 0$;

(iii) pour tous vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, on a

$$\mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v_1} + \vec{v_2}) = \mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v_1}) + \mathscr{A}(\vec{u}, \vec{v_2}) .$$



Nous pouvons développer la même théorie dans $\mathbb{R}^3$ via la notion de volume algébrique engendré par trois vecteurs. La définition suivante a pour but de proposer une généralisation de ces objets en dimension (éventuellement infinie) quelconque.

Définition XXIII.3. Soient E un $\mathbb{K}$–e.v ; on appelle **forme n–linéaire** sur ces espaces toute application $f : E^n \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $i \in [\![1, \dots, n]\!]$, pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E^n$, l'application

$$\begin{aligned} f_i : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ u &\mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E.

Remarque XXIII.5. Une forme n–linéaire est donc linéaire selon chacune des coordonnées (au sens du produit cartésien) des vecteurs de son ensemble de départ.

Exemple XXIII.9.

— $(x, y) \mapsto xy \in \mathscr{L}_2(\mathbb{K}, \mathbb{K})$;
— le produit scalaire (au sens vu en physique) est une forme 2–linéaire (on dit **bilinéaire**) sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$;
— l'aire et le volume algébriques évoqués dans le laïus géométrique *supra* sont des formes bilinéaire et trilinéaire respectivement.

Définition XXIII.4. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit f une forme n–linéaire sur E. On dit que f est **alternée** si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \neq j$ on a :

$$(x_i = x_j) \Rightarrow (f(x_1, \dots, x_n) = 0).$$

b) Quelques propriétés élémentaires

Proposition XXIII.5. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit f une forme n–linéaire alternée. Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \neq j$ on a :

$$f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{x_j}_{j}, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i}_{j}, \dots, x_n).$$

Démonstration. Pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$ et $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$ on a :

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_1, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{j}, \dots, x_n) \\
&= f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{j}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{j}, \dots, x_n) \\
&= f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{x_i}_{j}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{x_j}_{j}, \dots, x_n) \\
&\quad + f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i}_{j}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_j}_{j}, \dots, x_n) \\
&= f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{x_j}_{j}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i}_{j}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

par alternance, d'où le résultat.

□

Remarque XXIII.6. La réciproque est vraie : en effet, pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$ et $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$ on a :

$$f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{x_j}_{j}, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i}_{j}, \dots, x_n)$$

ce qui entraîne que si $x_i = x_j$

$$f(x_1, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n)$$

et donc $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Notation. On notera $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n–linéaires alternées/antisymétriques sur E.

✌ **Remarque XXIII.7.** On peut vérifier que $\Lambda_n(E)$ est un $\mathbb{K}$–e.v.

Proposition XXIII.6. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit $f \in \Lambda_n(E)$. Alors, pour toute famille **liée** $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ on a $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Démonstration. Si la famille est liée, cela signifie que, quitte à modifier l'ordre des x_i (ce qui changera éventuellement le signe de $f(x_1, \dots, x_n)$) il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k$$

et donc :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_1, \dots, x_k, , \dots, x_{n-1}, x_k) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

□

Proposition XXIII.7. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit $f \in \Lambda_n(E)$. Alors, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tous $x_1, \dots, x_n \in E$, on a :

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Démonstration. Écrire σ sous forme de produit de transpositions et développer. □

3.⁻ Déterminant

On fixe dans ce paragraphe un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie E de dimension $n \geq 1$ et une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de celui–ci.

a) Déterminant d'une famille de vecteurs

Théorème XXIII.8.
Il existe une unique forme $f \in \Lambda_n(E)$ telle que $f(\mathscr{B}) = 1$.

Démonstration. La démonstration de l'existence n'est pas exigible. Pour l'unicité, fixons $f \in \Lambda_n(E)$ et $x_1, \dots, x_n \in E$. Alors, il existe une unique famille $(x_{1,1}, \dots, x_{n,1}, x_{1,2} \dots, x_{n,n})$ de scalaires telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on ait

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i \,.$$

et alors :

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} x_{i,n} e_i\right) \,.$$

Pour obtenir une intuition du résultat de cette horreur, plaçons nous temporairement dans le cas $n = 2$:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= f(x_{1,1}e_1 + x_{2,1}e_2, x_{1,2}e_1 + x_{2,2}e_2) \\
&= x_{1,1} f(e_1, x_{1,2}e_1 + x_{2,2}e_2) + x_{2,1} f(e_2, x_{1,2}e_1 + x_{2,2}e_2) \\
&= x_{1,1}x_{1,2}(fe_1, e_1) + x_{1,1}x_{2,2} f(e_1, e2) + x_{2,1}x_{1,2} f(e_2, e_1) + x_{2,1}x_{2,2} f(e_2, e_2) \\
&= (x_{1,1}x_{1,2} - x_{2,1}x_{1,2}) f(e_1, e_2) \,.
\end{aligned}$$

En développant l'expression multilinéaire de $f(x_1, \dots, x_n))$, nous "intuitons" que tous les termes contenant l'image d'une famille liée seront annulés : ceci entraîne que chaque terme sera de la forme :

$$\prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

pour un certain $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Nous démontrons donc, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}\right) f(e_1, \dots, e_n)
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la proposition XXIII.7. Ceci entraîne le résultat voulu. □

Définition XXIII.5. L'unique forme $f \in \Lambda_n(E)$ telle que $f(\mathscr{B}) = 1$ est appelée **déterminant dans la base $\mathscr{B}$.**

Notation. $\det_{\mathscr{B}}$

✌ **Remarque XXIII.8.** On a donc, pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$:

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}$$

avec les décompositions initales

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$$

pour $j \in [\![1, n]\!]$. De plus, il est immédiat que :

$$\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$$

par définition.

Exemple XXIII.10. Si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ alors leur déterminant dans la bases canonique est :

$$\det(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \ ,$$

ce qui correspond à la quantité $\mathscr{A}(x, y)$ décrite au début de ce chapitre.

✍ **Exercice XXIII.1.** Donner une expression du déterminant dans la base canonique de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Interprétation géométrique ?

✌ **Remarque XXIII.9.** La déterminant est une somme de $n!$ produits, dont exactement la moitié sont porteurs d'une signature négative.

Proposition XXIII.9. Soit $f \in \Lambda_n(E)$. Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathscr{B}}$.

Démonstration. Cela découle du calcul mené dans la démonstration du théorème XXIII.8. Le scalaire λ est en fait égal à $f(e_1, \dots, e_n)$. □

✌ **Remarque XXIII.10.** Cela signifie que l'espace vectoriel $\Lambda_n(E)$ est de dimension 1 : il s'agit d'une droite.

Proposition XXIII.10. Soit $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \\ \Leftrightarrow \\ \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0.$$

Démonstration.

($\Downarrow$) Supposons que $\mathscr{F}$ est une base de E. Dans ce cas, on a $\det_{\mathscr{B}}, \det_{\mathscr{F}} \in \Lambda_n(E)$. Ce dernier ensemble étant une droite, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathscr{B}} = \lambda \det_{\mathscr{F}}$. Ainsi :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \lambda \det_{\mathscr{F}}(\mathscr{F}) = \lambda\,.$$

De plus, $\lambda \neq 0$ car $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1 = \lambda \det_{\mathscr{F}}(\mathscr{B})$.

($\Uparrow$) Supposons désormais que la famille $\mathscr{F}$ ne soit pas une base de E. Comme $\mathrm{card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$, elle ne peut donc pas être libre et donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = 0$ par la proposition XXIII.6.

□

✌ **Remarque XXIII.11.** En "bonus", nous tirons de la démonstration *supra* que pour toute base $\mathscr{B}'$ de E on a :

$$\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}$$

et

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \frac{1}{\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})}\,.$$

b) Déterminant d'une matrice carrée

Définition XXIII.6. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de M le déterminant de la famille de ses colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Notation. Le déterminant d'une matrice $M = (m_{i,j})_{i,j}$ sera noté $\det(M)$ ou

$$\begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix}.$$

✌ **Remarque XXIII.12.** Cette définition entraîne que si $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\,.$$

Il en découle, entre autres, que det est une application n–linéaire par rapport aux colonnes de la matrice concernée.

➠ **Exemple XXIII.11.**
— $\det(I_n) = 1$;
— si $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$

✍ **Exercice XXIII.2.** Déterminer une formule explicite pour le déterminant sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

Proposition XXIII.11. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) $\det(A^\top) = \det(A)$;

(ii) $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$;

(iii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = \det(A)^p$;

(iv) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration.

(i)

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),\sigma^{-1}(\sigma(i))}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{j,\sigma^{-1}(j)}\end{aligned}$$

via le changement d'indice $j = \sigma^{-1}(i)$ dans les produits. De plus, $\mathfrak{S}_n$ étant un groupe, on a :

$$\{\sigma^{-1} \,|\, \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \mathfrak{S}_n\,.$$

Enfin, comme ε est un morphisme de groupes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ on obtient l'egalité :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\sigma)\,.$$

et donc :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{j,\sigma(j)}\\ &= \det(A^\top)\,.\end{aligned}$$

(ii) Une matrice est inversible si et seulement si la famille de ses colonnes forme une base de $\mathbb{K}^n$. Ce fait est équivalent à la non–nullité du déterminant de cette famille dans la base mentionnée, d'où le résultat.

(iii) L'application

$$\begin{aligned}\phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K}\\ M &\mapsto \det(AM)\,,\end{aligned}$$

vue comme fonction des colonnes de M, est une forme n–linéaire alternée. De fait, elle est multiple du déterminant dans la base canonique, *i.e* il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(AM) = \lambda\det(M)$$

En évaluant en $M = I_n$, on trouve que $\lambda = \det(A)$, d'où le résultat. On gère le cas de A^p par récurrence.

(iv) L'application det, vue comme fonction des colonnes de la matrice concernée, est n–linéaire.

□

Remarque XXIII.13. — Le déterminant réalise donc un morphisme de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}^*$.

— Le point (i) implique que, pour tout $n \geq 0$:

$$A_{2n+1}(\mathbb{K}) \cap GL_{2n+1}(\mathbb{K}) = \emptyset\,.$$

Corollaire XXIII.11.a. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Corollaire XXIII.11.b. Le déterminant est un invariant de similitude.

c) Déterminant d'un endomorphisme

Proposition/définition XXIII.7. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors la quantité $\det(\text{mat}_{\mathscr{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$ et est appelé **déterminant** de l'endomorphisme f.

Notation. $\det(f)$

Démonstration. Soit $\mathscr{B}'$ une base de E. Alors, en posant $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ on a

$$\text{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}\text{mat}_{\mathscr{B}}(f)P$$

ergo

$$\begin{aligned}
\det(\text{mat}_{\mathscr{B}'}(f)) &= \det(P^{-1}\text{mat}_{\mathscr{B}}(f)P) \\
&= \det(P^{-1})\det(\text{mat}_{\mathscr{B}}(f))\det(P) \\
&= \frac{1}{\det(P)}\det(\text{mat}_{\mathscr{B}}(f))\det(P) \\
&= \det(\text{mat}_{\mathscr{B}}(f))\,.
\end{aligned}$$

□

Proposition XXIII.12. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$;

(ii) $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$;

(iii) $f \in GL(E) \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$.

Démonstration. Il s'agit d'un analogue de la proposition XXIII.11. □

✌ **Remarque XXIII.14.** Le déterminant réalise ici un morphisme de groupes de $GL(E)$ vers $\mathbb{K}^*$.

4.⁻ Calculs

Savoir définir un déterminant, c'est bien. Savoir le calculer, c'est...mieux ? Nous laissons le lecteur juge de ce fait.

a) Matrices triangulaires

Proposition XXIII.13. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **triangulaire**. Alors :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}\,.$$

Démonstration. Supposons, pour fixer les idées, que $A \in T_n^+(\mathbb{K})$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ différente de l'identité. Alors, il existe nécessairement $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) > i$ et donc $a_{\sigma(i),i} = 0$, ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}}_{=0 \text{ si } \sigma \neq \mathrm{id}} \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}\,.\end{aligned}$$

□

➠ **Exemple XXIII.12.**

— pour tous $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}$, $\det(\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)) = d_1 \dots d_n$;

—
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 51 & 22 & -\pi \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 16\,.$$

✌ **Remarque XXIII.15.** Ceci se généralise aux matrices triangulaires par blocs **carrés** : si A, B, C sont des matrices alors

$$\det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\right) = \det(A)\det(C)$$

et même chose avec les matrices triangulaires par blocs admettant un plus grand nombre de blocs.

b) Impact des opérations élémentaires

Nous avions listé dans le chapitre XII une liste d'opérations élémentaires sur les lignes et colonnes des matrices. Appliquer celles–ci aux **colonnes** d'un déterminant modifie celui–ci de la façon suivante :

(A) échanger la position de deux colonnes ($C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 (*antisymétrie*) ;

(B) multiplier une colonne par un scalaire **non nul** ($C_i \leftarrow \lambda C_i$) multiplie le déterminant par ce dernier (*n–linéarité*) ;

(C) ajouter à une colonne une combinaison linéaire des **autres** $\left(C_i \leftarrow C_i + \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j C_j\right)$ ne modifie pas le déterminant (*caractère alterné*).

Il est également possible d'agir sur les **lignes** d'un déterminant de la même façon et avec les mêmes effets. Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss (*cf.* chapitre XII) pour obtenir un déterminant triangulaire est généralement une bonne idée.

✍ **Exercice XXIII.3.** Soit $x \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant suivant :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

➥ **Correction :** *Commençons par effectuer l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \ldots + C_n$; on obtient*

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ x+n-1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ x+n-1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix} \\ &= (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Nous appliquons ensuite, pour tout $i \geq 2$, $L_i \leftarrow L_i - L_1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x+n-1)(x-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

c) Développement suivant une ligne ou une colonne

Définition XXIII.8. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. On appelle :
- **mineur** d'indices i et j le déterminant de la matrice $\mathrm{Min}_{i,j}(A)$ extraite de A suivant l'ensemble $([\![1, n]\!] \setminus \{i\}) \times ([\![1, n]\!] \setminus \{j\})$;
- **cofacteur** d'indices i et j la quantité $\mathrm{Cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j}\mathrm{Min}_{i,j}(A)$.

Remarque XXIII.16. Le mineur d'indices i et j est donc la matrice obtenue en "rayant" la ligne i et la colonne j de la matrice A.

Exemple XXIII.13. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Ses mineurs et cofacteurs sont donnés par le tableau récapitulatif *infra*.

i	j	$\mathrm{Min}_{i,j}(A)$	$\mathrm{Cof}_{i,j}(A)$
1	1	d	d
1	2	c	-c
2	1	b	-b
2	2	a	a

Exercice XXIII.4. Lister les mineurs et les cofacteurs de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

◇ Petit calcul sympathique

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soient $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}^n$ ses colonnes (on aura donc $A = (A_1 \mid \dots \mid A_n)$). On notera également $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de façon à avoir, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \,.$$

De fait, à $j \in [\![1, n]\!]$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det_{\mathscr{B}}(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n) \\
&= \det_{\mathscr{B}}\left(A_1, \dots, A_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i, A_{j+1}, \dots, A_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_{\mathscr{B}}(A_1, \dots, A_{j-1}, e_i, A_{j+1}, \dots, A_n)
\end{aligned}$$

par n–linéarité du déterminant dans la base $\mathscr{B}$. Dit autrement, cela signifie que nous avons

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} D_{i,j}$$

avec

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{i-1,j-1} & 0 & & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

la colonne "modifiée" étant en j–ième position.

Tout ceci est bien sympathique, mais sommes nous seulement capables de calculer les $D_{i,j}$? Bien entendu, mais rien n'est gratuit...Calculons (avec entrain) ! Quitte à effecteurs les opérations $C_j \leftrightarrow C_{j+1}$, ..., $C_{n-1} \leftrightarrow C_n$ (dans cet ordre), on a :

$$D_{i,j} = (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & a_{i-1,j-1} & & & \vdots & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & a_{n-1,n} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous opérons ensuite les échanges (ordonnés) suivants : $L_i \leftrightarrow L_{i+1}$, $L_{i+1} \leftrightarrow L_{i+2}$, ..., $L_{n-1} \leftrightarrow L_n$. On a *in fine* :

$$D_{i,j} = \underbrace{(-1)^{2n-(i+j)}} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & a_{i-1,j-1} & & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & a_{j+1,j+1} & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant étant triangulaire par blocs, on a immédiatement :

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(\mathrm{Min}_{i,j}(A)) = \mathrm{Cof}_{i,j}(A)\,.$$

Nous déduisons de cette plongée dans le stupre calculatoire, la proposition suivante, fort utile en pratique.

Proposition XXIII.14. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $j \in [\![1, n]\!]$. Alors :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\mathrm{Cof}_{i,j}(A)\,.$$

Remarque XXIII.17. Ce procédé, appelé **développement selon une colonne** de A admet un pendant relatif aux lignes de celles ci, dont la démonstration est analogue :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mathrm{Cof}_{i,j}(A)\,.$$

Exemple XXIII.14. On retrouve aisément de cette façon la formule, pour $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Le lecteur audacieux pourra également s'en servir pour obtenir une formule explicite pour le déterminant dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

Exercice XXIII.5. Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \geq 0$. Calculer le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Correction : *Soit $n \geq 2$; on commence par opérer un développement par rapport à la première colonne, qui donne :*

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x\Delta_{n-1}$$

où

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

En développant Δ_{n-1} par rapport à sa première ligne, on trouve :

$$\Delta_{n-1} = xD_{n-2}$$

ce qui permet in fine d'écrire :

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}\,.$$

On reconnaît une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 (cf. chapitre VII). Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} D_n - D_{n-1} &= x^2(D_{n-1} - D_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= x^{2(n-1)}(D_1 - D_0) \end{aligned}$$

avec $D_0 = 1$ et $D_1 = 1 + x^2$ (en prenant la convention qu'un produit sans terme est égal à 1). Nous terminons donc avec :

$$D_n = D_{n-1} + x^{2n}$$

i.e

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n} x^{2k} \\ &= \begin{cases} n+1 \ si\ x = \pm 1 \\ \dfrac{1-x^{2(n+1)}}{1-x^2} \ sinon. \end{cases} \end{aligned}$$

◇ **Déterminant de Vandermonde**

Le déterminant suivant est appelé **déterminant de Vandermonde** (en l'honneur d'Alexandre–Théophile Vandermonde, mathématicien, économiste, musicien et chimiste français, 1735—1796).

Proposition XXIII.15. Soit $n \geq 2$ et soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\det((a_i^j)_{i,j\in[\![0,n-1]\!]}) = \prod_{k=1}^{n-1}\prod_{j=0}^{k-1}(a_k - a_j)\,.$$

Démonstration. Posons :

$$\begin{aligned} V_n(a_0,\ldots,a_{n-1}) &= \det((a_i^j)_{i,j\in[\![0,n-1]\!]}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Pour calculer ce déterminant, nous effectuons, dans l'ordre **décroissant** de l'indice $k \in [\![2, n]\!]$, l'opération $C_k \leftarrow C_k - a_{n-1}C_{k-1}$, ce qui donne :

$$V_n(a_0,\ldots,a_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 - a_{n-1} & a_0(a_0 - a_{n-1}) & \ldots & a_0^{n-2}(a_0 - a_{n-1}) \\ 1 & a_1 - a_{n-1} & a_1(a_1 - a_{n-1}) & \ldots & a_1^{n-2}(a_1 - a_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-2} - a_{n-1} & a_{n-2}(a_{n-2} - a_{n-1}) & \ldots & a_{n-2}^{n-2}(a_{n-2} - a_{n-1}) \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant se développe relativement à sa dernière ligne, livrant :

$$V_n(a_0,\ldots,a_{n-1}) = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a_0 - a_{n-1} & a_0(a_0 - a_{n-1}) & \ldots & a_0^{n-2}(a_0 - a_{n-1}) \\ a_1 - a_{n-1} & a_1(a_1 - a_{n-1}) & \ldots & a_1^{n-2}(a_1 - a_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-2} - a_{n-1} & a_{n-2}(a_{n-2} - a_{n-1}) & \ldots & a_{n-2}^{n-2}(a_{n-2} - a_{n-1}) \end{vmatrix}$$

puis, nous pouvons factoriser, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{k-1} - a_{n-1}$ dans la ligne k, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
V_n(a_0, \dots, a_{n-1}) &= (-1)^{n+1} \prod_{k=0}^{n-2} (a_k - a_{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^{n-2} \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-2} & \dots & a_{n-2}^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1} \prod_{k=0}^{n-2} (a_k - a_{n-1}) V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-2}) \\
&= \prod_{k=0}^{n-2} (a_{n-1} - a_k) V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-2}) .
\end{aligned}$$

On obtient donc, par récurrence que :

$$V_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{k-1} (a_k - a_j) .$$

□

✌ **Remarque XXIII.18.**

— On a donc :

$$V_n(a_0, \dots, a_{n-1}) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow$$
les a_i sont deux à deux distincts.

— On peut établir un parallèle entre la matrice associée au determinant de Vandermonde et l'interpolation polynomiale. En effet, si $x_0, \dots, x_{n-1}$ et $y_0, \dots, y_{n-1}$ sont des scalaires, trouver un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifiant, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(x_k) = y_k$ revient à trouver $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} .$$

Ce système linéaire est de Cramer si et seulement si $V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \neq 0$, *i.e* si et seulement si les x_k sont deux à deux distincts. Toute ressemblance avec la proposition XIV.22 et les polynômes interpolateurs de Lagrange est non fortuite...

d) Inversion de matrices

Définition XXIII.9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **comatrice** de A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient en position $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ est le cofacteur $\mathrm{Cof}_{i,j}(A)$.

Notation. $\mathrm{Com}(A)$

Vocabulaire. La transposée de la comatrice de A est appelée **transcomatrice** de A. On la note $\mathrm{Com}(A)^\top$ ou $\tilde{A}$.

➠ **Exemple XXIII.15.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Alors :

$$\mathrm{Com}(A)^\top = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Proposition XXIII.16. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n.$$

Démonstration. Notons $a_{i,j}$ les coefficients de A et $b_{i,j}$ ceux de sa transcomatrice. Alors, pour $i \in [\![1, n]\!]$, le coefficient en position (i, i) de la matrice $A\mathrm{Com}(A)^\top$ est :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \mathrm{Cof}_{i,k}(A) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

via développement selon la ligne i. Si on fixe à présent $j \neq i$, le coefficient en position (i, j) de $A\mathrm{Com}(A)^\top$ est :

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \mathrm{Cof}_{j,k}(A)$$

Il s'agit du déterminant de la matrice B définie comme suit : les lignes de B sont identigues à celles de A, à l'exception de la ligne j que l'on fixe égale à la ligne i de A. Cette matrice ayant deux lignes identiques, elle ne peut être inversible. De fait :

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \mathrm{Cof}_{j,k}(A) = 0$$

d'où le résultat, quitte à raisonner similairement pour $\mathrm{Com}(A)^\top A$. □

✌ **Remarque XXIII.19.** Si $A \notin GL_n(\mathbb{K})$, alors $A\mathrm{Com}(A)^\top = 0$. Ceci n'est pas très intéressant cependant car si $\mathrm{rg}(A) < n - 1$, la comatrice de A est nulle. . .

Corollaire XXIII.16.a. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^\top.$$

Exemple XXIII.16. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$. Alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Remarque XXIII.20. Calculer l'inverse d'une matrice $n \times n$ de cette façon demande de calculer n^2 déterminants de taille $(n-1) \times (n-1)$, soit $n \times n!$ multiplications. Ceci est déraisonnable : le calcul d'un inverse 20×20 demanderait plus de 150 ans sur une machine décente. De son côté, une application de l'algorithme du pivot de Gauss à un système de rang r nécessitera r étapes d'élimination. Dans chacune d'entre elles, nous devons normaliser une ligne ($\approx q$ divisions) et la soustraire à au plus p autres ($\approx q$ multiplications à chaque fois). Dans le cas d'un système de Cramer, avec $A \in GL_n(\mathbb{K})$, nous avons affaire à un nombre d'opérations en $\mathscr{O}(n^3)$. Ceci est **bien plus efficace** : nous donnons, à titre d'illustration, quelques exemples de temps de calcul approximatifs sur une machine effectuant *grosso modo* 10^{10} opérations par seconde (ce qui est raisonnable).

n	Comatrice	Gauss
3	2.10^{-9}s	5.10^{-9}s
5	7.10^{-8}s	2.10^{-8}s
10	4.10^{-3}s	2.10^{-7}s
20	160 ans	2.10^{-6}s
25	10^9 ans	3.10^{-6}s
100	3.10^{142} ans	2.10^{-4}s
1000	10^{2553} ans	$0,2$s