Chapitre XXII

Séries numériques

On fixe dans tout ce chapitre un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.⁻ Qu'est–ce ?

a) Notion de série

Définition XXII.1. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **série de terme général** u_n la suite

$$\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, on appelle **somme partielle de rang** N de la série la quantité

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n\,.$$

✌ **Remarque XXII.1.** La somme partielle de rang N d'une série est donc le N-ième terme de la suite sous–jacente à celle–ci.

Notation. On note $\sum u_n$ la série de terme général u_n. **Ceci n'est PAS une somme**, mais une suite de sommes.

✌ **Remarque XXII.2.** Il est possible de considérer des séries dont le terme général n'est défini qu'à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$. On noter alors $\sum\limits_{(n\geq n_0)} u_n$. Les résultats énoncés dans ce chapitre se généralisent aisément à ce type de séries.

➠ **Exemple XXII.1.** $\sum \cos(n)$ est une série définie à partir du rang 0 ; $\sum\limits_{(n\geq 1)} \frac{1}{n}$ est définie à partir du rang 1.

◇ **Exemples fondamentaux**

Définition XXII.2. Soit $q \in \mathbb{C}$. On appelle **série géométrique de raison** q la série $\sum q^n$.

Remarque XXII.3. Il est aisé de déterminer les sommes partielles d'une série géométrique ; si $N \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$ on a :

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ N+1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Définition XXII.3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On appelle **série de Riemann de paramètre** α la série $\sum\limits_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exemple XXII.2. La série de Riemann de paramètre 1 est la série $\sum\limits_{(n\geq 1)} \frac{1}{n}$. On l'appelle **série harmonique**.

b) Somme, restes

Définition XXII.4. Une série $\sum u_n$ est dite **convergente** si la suite de ses sommes partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série est **divergente**.

Notation. Si la série $\sum u_n$ est convergente, on pose :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n \,.$$

Cette quantité, que l'on appelle **somme** de la série $\sum u_n$, n'est **toujours pas** une somme : il s'agit de la limite d'une suite de sommes . . .

Exemple XXII.3.

— La série $\sum n$ diverge ; en effet, pour $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty \,.$$

— À l'inverse, la série $\sum\limits_{(n\geq 1)} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. En effet, pour $N \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} 1 \end{aligned}$$

et donc
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1\,.$$

✍ **Exercice XXII.1.** Montrer l'existence de et calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

➥ **Correction :** *Commençons par remarquer que, pour tout $n \geq 1$:*
$$\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$$
et donc, pour tout $N \geq 1$ on a :
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} &= \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \sum_{n=1}^{N} (-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{1-(-t)^N}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$
Or :
$$\left|\int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^N\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$
donc la suite des sommes partielles de la série étudiée converge et
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = -\ln(2)\,.$$

Proposition XXII.1. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

Démonstration. Il suffit de remarque que, si on note $(S_N)_N$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, on a, pour tout $N \geq 1$:
$$\begin{aligned}
u_N &= S_N - S_{N-1} \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n \\
&= 0
\end{aligned}$$
d'où le résultat. □

✖ **Attention :** la réciproque est **fausse**. Pour un contre–exemple, considérer la série $\sum \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$: on vérifie (faire un DL) que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ et pourtant, pour tout $N \geq 0$ on a :

$$\sum_{n=0}^{N} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{N+1} \to \infty\,.$$

Remarque XXII.4. Ce résultat sera toutefois fort utile pour démontrer la **divergence** d'une série : si la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, alors la suite $\sum u_n$ diverge automatiquement : on parle alors de **divergence grossière**.

Exemple XXII.4. Les séries $\sum \cos(n)$ et $\sum n^3 + \frac{2}{n+1}$ divergent grossièrement.

Exercice XXII.2. Déterminer pour quelles valeurs de x la série $\sum\limits_{(n\geq 1)} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ est convergente et établir que dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\ln(1+x)\,.$$

➥ **Correction :** *Pour obtenir la somme, utiliser l'inégalité de Taylor–Lagrange (proposition XX.20) en s'inspirant du développement limité de* $\ln(1+x)$ *en* 0.

Proposition XXII.2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **convergentes** et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) la série $\sum u_n + \lambda v_n$ converge ;

(ii)
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + \lambda v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} v_n\,.$$

Démonstration. Appliquer les opérations sur les limites vues dans le chapitre VII aux sommes partielles. □

✖ **Attention :** ce type d'opérations ne saurait être effectué que lorsque les **deux** séries considérées convergent.

Définition XXII.5. Soit $\sum u_n$ une série **convergente** de somme S. Pour $N \in \mathbb{N}$, on appelle **reste d'ordre** N de la série $\sum u_n$ la quantité $R_N = S - S_N$, où S_N est la somme partielle de rang N de celle–ci.

Notation. Le reste d'ordre N de $\sum u_n$ est noté

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n\,.$$

Remarque XXII.5. Il est aisé de vérifier que, comme $\sum u_n$ converge, $R_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Exemple XXII.5. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{1-q}\,.$$

c) Lien suite–série

Proposition XXII.3. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$\text{la suite } (u_n)_n \text{ converge} \iff \text{la série } \sum u_{n+1} - u_n \text{ est convergente.}$$

Dans ce cas, on a de plus :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} - u_n = \lim u_n - u_0\,.$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_{n+1} - u_n &= \sum_{n=0}^{N} u_{n+1} - \sum_{n=0}^{N} u_n \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n \\ &= u_{N+1} - u_0\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Vocabulaire. Les séries du type $\sum u_{n+1} - u_n$ sont appelées **séries télescopiques**.

Exemple XXII.6. La série $\sum\limits_{(n\geq 1)} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ diverge. En effet, son terme général est égal, pour $n \geq 1$, à $\ln(n+1) - \ln(n)$ et $\ln(n) \to \infty$.

Remarque XXII.6. Ce résultat implique que toute suite qui tend vers 0 peut être interprétée comme la suite des restes d'une série convergente.

d) Exemples fondamentaux

◇ Séries géométriques

Proposition XXII.4. Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\text{la série géométrique } \sum q^n \text{ converge} \iff |q| < 1.$$

Dans ce cas, on a de plus :

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,.$$

Démonstration. **Cas 1 : $|q| < 1$.** Comme nous le savons, si $N \geq 0$ on a :

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} .$$

Il est alors clair que la suite des sommes partielles de $\sum q^n$ converge vers $\dfrac{1}{1-q}$.

Cas 2 : $|q| \geq 1$. La suite $(q^n)_n$ ne convergeant pas vers 0, on a divergence grossière (proposition XXII.1) de la série $\sum q^n$.

□

◇ Séries exponentielles

Proposition XXII.5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

(i) la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge ;

(ii)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z .$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$; on pose alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f_z(t) = e^{zt} .$$

La fonction f_z est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on démontre aisément par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_z^{(k)}(t) = z^k e^{zt} .$$

L'inégalité de Taylor–Lagrange (proposition XX.20) entre 0 et 1 nous permet alors d'écrire que :

$$f_z(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_z^{(k)}(0)}{k!} + R_n$$

avec

$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[0,1]} |z^{n+1}e^{zx}| .$$

On démontre (utiliser la formule de Stirling) que $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ce qui implique que l'on a convergence de la série de Taylor associée à $f_z(1)$ et

$$f_z(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_z^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ,$$

ce qui nous livre bien

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

□

✌ **Remarque XXII.7.** On déduit de ce résultat que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \; ; \\
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \; ; \\
\operatorname{ch}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \; ; \\
\operatorname{sh}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \, .
\end{aligned}$$

◇ Séries alternées

Proposition XXII.6. [Critère spécial des séries alternées] Soit $(u_n)_n$ une suite **décroissante** de nombres **réels positifs**. Alors :

(i) la série $\sum(-1)^n u_n$ converge si et seulement si $u_n \to 0$;

(ii) dans ce cas on a, pour tout $N \geq 0$:

$$S_{2N+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n \leq S_{2N} \quad \text{et} \quad 0 \leq |R_N| \leq u_{N+1}$$

si $(S_N)_N$ (resp. $(R_N)_N$) est la suite des sommes partielles (resp. des restes) de la série $\sum(-1)^n u_n$. R_N est par ailleurs du signe du terme de $(-1)^{N+1}$.

Démonstration. Notons tout d'abord que si $u_n \not\to 0$, la série $\sum(-1)^n u_n$ diverge grossièrement. Inversement, si $u_n \to 0$, posons, pour $N \in \mathbb{N}$, $A_N = S_{2N}$ et $B_N = S_{2N+1}$; on a alors, pour tout $N \geq 0$:

$$\begin{aligned}
A_{N+1} - A_N &= \sum_{n=0}^{2(N+1)} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n u_n \\
&= u_{2N+2} - u_{2N+1} \\
&\leq 0 \quad \text{par décroissance de } (u_n)_n.
\end{aligned}$$

La suite $(A_N)_n$ est donc décroissante ; on vérifie de façon similaire que (B_N) est croissante. De plus :

$$\forall N \in \mathbb{N},\; A_N - B_N = \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n u_n = u_{2N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

et donc les suites $(A_N)_N$ et $(B_N)_N$ sont adjacentes et donc convergent vers une même limite ℓ (*cf.* proposition VII.16) vérifiant :

$$\forall N \geq 0, \quad S_{2N+1} \leq \ell \leq S_{2N} \, .$$

Les suites $(S_{2N})_N$ et $(S_{2N+1})_N$ convergeant toutes les deux vers ℓ, on a par la proposition VII.14 que la suite $(S_N)_N$ converge vers ℓ. On a donc bien convergence de la série $\sum(-1)^n u_n$ et l'inégalité voulue sur les sommes partielles. Il suffit ensuite de remarquer que pour si on soustrait S_{2N} à cette dernière on obtient :

$$-u_{2N+1} \leq R_{2N} \leq 0\,.$$

On a donc bien $|R_{2N}| \leq u_{2N+1}$ et :

$$0 \leq R_{2N+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n - S_{2N+1} \leq S_{2N+2} - S_{2N+1} = u_{2N+2}$$

car $S_{2N+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n \leq S_{2N+2}$, d'où le résultat. □

➠ **Exemple XXII.7.** Les séries de Riemann alternées $\sum_{(n\geq 1)} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ convergent pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

2.– Séries à termes positifs

On s'intéresse dans ce paragraphe à une famille particulière de séries, en l'occurrence celles dont le terme général ne prend que des valeurs réelles positives.

Définition XXII.6. Une **série à termes positifs** est une série $\sum u_n$ telle que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n \in \mathbb{R}_+\,.$$

a) Critère de convergence

Proposition XXII.7. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration. Ceci est immédiat car la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est une suite réelle croissante. □

✖ **Attention :** ce résultat est bien entendu faux lorsque la série n'est pas à termes positifs. La suite $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement et pourtant ses sommes partielles sont comprises entre 0 et 1.

✌ **Remarque XXII.8.** Si $\sum u_n$ est une série à termes positives divergente alors on a

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty\,.$$

b) Comparaison des séries à termes positifs

Proposition XXII.8. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que, $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ 0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

(i) la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$;

(ii) la divergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$.

✌ **Remarque XXII.9.** Par passage à la limite dans le cas (i), on a également, si l'inégalité $u_n \leq v_n$ est vérifiée pour tout n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n\,.$$

Démonstration. Ceci découle du critère de convergence des séries à termes positifs (proposition XXII.6). □

De fait, ce résultat nous permet de déduire la convergence (ou divergence) de nombreuses séries à termes positifs en les comparant à des exemples connus (comme les séries géométriques de ce type) : nous nous constituons ainsi un "catalogue" de séries à termes positifs "témoins" pour établir la nature de leurs consœurs.

➠ **Exemple XXII.8.** La série de terme général $\dfrac{e^{-n!}}{2^n}$ converge par comparaison avec $\sum \frac{1}{2^n}$.

Proposition XXII.9. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Par équivalence, il existe une suite $(h_n)_n$ convergeant vers 1 et un entier $N \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq N,\ u_n = h_n v_n\,.$$

On obtient l'existence d'un entier $N' \geq 0$ tel que pour $n \geq N'$, $h_n \leq \pi$ et donc, pour tout $n \geq \max(N, N')$ $u_n \leq \pi v_n$. Ceci entraîne que, par comparaison (proposition XXII.8) que la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$. On conclut en observant que les rôles de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont symétriques. □

➠ **Exemple XXII.9.** La série $\sum \frac{n^2+1}{3n^2+2} e^{-n}$ est convergente car son terme général est équivalent à $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$, ce dernier étant le terme général d'une série géométrique convergente (à facteur multiplicatif près).

✖ **Attention :** il n'y a pas en général égalité des sommes dans le cas convergent. Des résultats de sommation plus précis seront étudiés en MP.

c) Critère de d'Alembert

Proposition XXII.10 (Critère de d'Alembert)**.** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n > 0\,.$$

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in [0,+\infty]$. Alors :

(i) si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge ;

(ii) si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ;

(iii) si $\ell = 1$, on ne peut conclure.

Démonstration.

(i) Si $\ell < 1$ alors si on prend $q \in]0,1[$ on a :

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$$

et donc, pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq q u_n \\ &\leq q^2 u_{n-1} \\ &\ \ \vdots \\ &\leq q^{n+1-N} u_N \end{aligned}$$

et donc, par comparaison (proposition XXII.8) avec la série géométrique $\sum q^n$, la série $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$, la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante et donc ne peut converger vers 0, d'où le résultat.

(iii) Dans le cas $\ell = 1$, considérer les séries $\sum 1$ et $\sum\limits_{(n\geq 1)} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour mesurer la futilité de la chose.

□

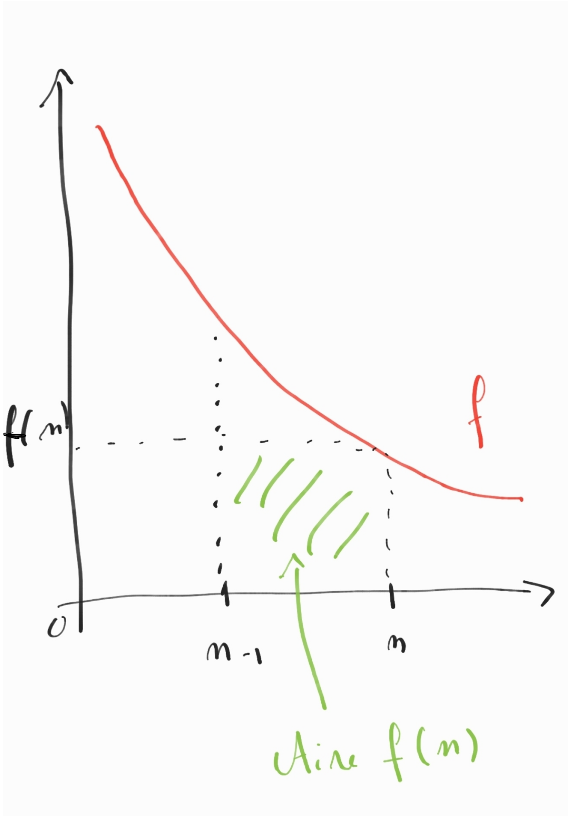
➠ **Exemple XXII.10.** La série à termes positifs $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge car :

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \exp\left(-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1\,. \end{aligned}$$

d) Comparaison série–intégrale

Considérons une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et **décroissante**. Alors, on vérifie par méthode des rectangles que :

$$\forall n \geq 1,\ f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$



Ceci nous permet, pour $M, N \in \mathbb{N}$ tels que $M \leq N$ de vérifier que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N} f(n) &= f(M) + \sum_{n=M+1}^{N} f(n) \\ &\leq f(M) + \sum_{n=M+1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(M) + \int_{M}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Ce résultat nous laisse entrevoir un encadrement possible des sommes partielles de la série $\sum f(n)$ par des intégrales, que nous formalisons *infra*.

Proposition XXII.11 (Comparaison série–intégrale)**.** Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R}_+)$ une fonction **décroissante à valeurs positives**. Alors, pour tout $M, N \in \mathbb{N}$ tels que $M \leq N$ on a :

$$\int_{M}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=M}^{N} f(n) \leq f(M) + \int_{M}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration. Nous avons déjà démontré l'inégalité de droite. Pour celle de gauche, appliquer une heuristique analogue en remarquant que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

□

Ce résultat a de nombreuses conséquences, dont nous étudierons certaines dans la suite de ce paragraphe. Dans un premier temps, intéressons nous aux séries de Riemann **de paramètre réel**.

Proposition XXII.12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) si $\alpha \leq 0$, la série $\sum_{(n \geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement ;

(ii) si $\alpha \in]0, 1]$, la série $\sum_{(n \geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge ;

(iii) si $\alpha > 1$, la série $\sum_{(n \geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Démonstration. Commençons par remarquer que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto x^{-\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(i) Trivial.

(ii) **Cas 1 : $0 < \alpha < 1$.** Dans ce cas, une primitive de f est :

$$x \mapsto \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

et donc, par comparaison série–intégrale (proposition XXII.11), on a pour $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} &\geq \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \\ &= \frac{(N+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \\ &\xrightarrow[N \to \infty]{} \infty \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Cas 2 : $\alpha = 1$. Une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est :

$$x \mapsto \ln(x)$$

et donc, par comparaison série–intégrale, on a pour $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} &\geq \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \ln(N+1) \\ &\xrightarrow[N \to \infty]{} \infty \end{aligned}$$

ce qui entraîne la divergence annoncée.

(iii) Dans ce cas, une primitive de f est donnée par

$$x \mapsto \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}.$$

De fait, par comparaison série–intégrale :

$$\begin{aligned}\forall N \geq 1,\ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} &\leq 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \\ &= 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}\end{aligned}$$

et donc, par critère de convergence des séries à termes positifs (proposition XXII.6), la série $\sum\limits_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

□

✍ **Exercice XXII.3.** Donner un équivalent du reste de la série $\sum\limits_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^2}$.

➥ **Correction :** *On applique une comparaison série–intégrale (proposition XXII.11) pour $M, N \geq 1$ tels que $M \leq N$, obtenant :*

$$\int_M^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{M^2} + \int_M^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

i.e :

$$\frac{1}{M} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{M^2} + \frac{1}{M} - \frac{1}{N}$$

et donc, en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient :

$$\frac{1}{M} \leq R_{M-1} \leq \frac{1}{M^2} + \frac{1}{M}\,.$$

Une application du théorème d'encadrement des limites (théorème VII.11) permet ensuite aisément de déduire que $R_M \sim \dfrac{1}{M}$.

⋄ Étude asymptotique de la série harmonique

Nous avons démontré plus haut que la série harmonique $\sum\limits_{(n\geq 1)} \frac{1}{n}$ diverge. Mais encore ? Nous nous attachons dans ce paragraphe à offrir à notre lecteur une vision plus raffinée de la situation. Commençons par poser, pour $N \geq 1$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

et remarquer que, par comparaison série–intégrale (proposition XXII.11)

$$\ln(N+1) \leq S_N \leq 1 + \ln(N)$$

ce qui permet de démontrer, *via* le théorème d'encadrement des limites (théorème VII.11) que :

$$S_N \sim \ln(N)\,.$$

Ce premier résultat étant acquis, affinons cette approximation. Pour ce faire, posons, pour $n \geq 1$, $u_n = S_n - \ln(n)$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) . \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et donc, en réinjectant :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) . \end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure que $u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$ et donc, par comparaison des séries à termes positifs avec la série de Riemann convergente $\sum_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^2}$, la série $\sum_{(n\geq 1)} u_n - u_{n+1}$ converge. Par lien suite–série (proposition XXII.3), la suite $(u_n)_n$ converge vers un réel γ, appelée constante d'Euler—Mascheroni (le second, de son prénom Lorenzo, ayant été un mathématicien et abbé cisalpin ; 1750—1800). Obtenir une valeur approchée de cette constante est aisé à l'aide de (par exemple) `python`. On obtient, en un temps raisonnable, $\gamma \approx 0,5772156649$.

```python
from numpy import log

def approx_gamma(N):
    S=-log(N)
    for i in range(N):
        S+=1/(i+1)
    return S
```

On obtient donc, *in fine*, le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + o(1) . \qquad (\textbf{E} :\text{XXII.1})$$

3.⁻ Convergence absolue

a) What ?

Définition XXII.7. On dit qu'une série $\sum u_n$ **converge absolument** si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

➠ **Exemple XXII.11.**

— Les séries à termes positifs convergentes sont absolument convergentes...
— La série $\sum_{(n\geq 1)} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument.
— La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.
— Soit $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ et soit $n \geq 1$. Alors :

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{|n^a n^{ib}|} = \frac{1}{n^a |e^{ib\ln(n)}|} = \frac{1}{n^a}.$$

On en déduit que **la série de Riemann** $\sum_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$ **converge absolument si et seulement si** $\mathrm{Re}(\alpha) > 1$**.**

b) Lien à la convergence

Dans le chapitre VII, nous avons démontré que la convergence d'une suite $(u_n)_n$ entraînait celle de $(|u_n|)_n$ avec réciproque fausse. Ce résultat ne se généralise pas aux séries, comme nous le démontrons avec le contre–exemple suivant.

Intéressons nous à la **série harmonique alternée** $\sum_{(n\geq 1)} \frac{(-1)^n}{n}$, dont nous savons qu'elle converge par le critère spécial des séries alternées (propostion XXII.6). Or, elle ne converge pas absolument : la série de ses valeurs absolues est la série harmonique. **Convergence n'implique donc pas PAS convergence absolue pour les séries.**

Histoire de compliquer un peu plus les choses, la réciproque est, quant à elle, vraie...

Proposition XXII.13. Toute série absolument convergente est convergente.

Avant de démontrer ce résultat, introduisons une notion dont nous ferons également usage au chapitre XXVIII.

Définition XXII.8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle :
- **partie positive** de x le réel
$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$
- **partie négative** de x le réel
$$x^- = \begin{cases} -x & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Exemple XXII.12. $2^+ = 2$, $(-15)^- = 15$.

Remarque XXII.10. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Démonstration. Dans le cas réel, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et $u_n = u_n^+ - u_n^-$. De fait, les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont à termes positifs et, pour tout $n \geq 0$, $u_n^\pm \leq |u_n|$: par comparaison des séries à termes positifs (proposition XXII.8), ces deux séries convergent si $\sum u_n$ converge absolument, ce qui entraîne la convergence de cette dernière par linéarité.

Dans le cas complexe, on procède de façon similaire avec les séries des parties réelles et imaginaires. □

Exemple XXII.13. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 1$, alors la série de Riemann $\sum\limits_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Ceci permet de définir la **fonction zêta de Riemann** :
$$\zeta : \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} .$$

Proposition XXII.14. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors :
$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| .$$

Démonstration. Passer à la limite dans l'inégalité triangulaire appliquée aux sommes partielles. □

Proposition XXII.15. Soit $u \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ et soit $v \in (\mathbb{R}_+)^\mathbb{N}$ telles que :
- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$;
- $\sum v_n$ converge.

Alors $\sum u_n$ converge absolument.

Démonstration. Par domination, il existe une suite $(h_n)_n$ positive, bornée par $M \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n| \leq h_n v_n$$

et donc, pour $n \geq N$, $|u_n| \leq M v_n$. Par comparaison des séries à termes positifs (proposition XXII.8), on obtient la convergence annoncée. □

➠ **Exemple XXII.14.** La série $\sum_{(n \geq 1)} \frac{\sin(n)}{n^3}$ converge absolument.