

Chapitre XXI

Algèbre linéaire matricielle

On fixe dans tout ce chapitre un corps \mathbb{K} égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. Matrice(s) d'une application linéaire

a) Matrices et vecteurs

Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Fixons $x \in E$; alors il existe une unique famille (x_1, \dots, x_n) de scalaires telle que :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i .$$

Dans ces conditions, on appelle **matrice de x dans la base \mathcal{B}** la matrice

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) .$$

▮ **Exemple XXI.1.** Dans la base $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$ de \mathbb{R}^2 , on a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x, y) = (x - y) \cdot (1, 0) + y \cdot (1, 1)$$

et donc

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}((x, y)) = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix} .$$

✎ **Remarque XXI.1.** On peut relier cette définition aux formes linéaires coordonnées en remarquant que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} e_1^*(x) \\ \vdots \\ e_n^*(x) \end{pmatrix} .$$

Proposition XXI.1. Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie de dimension $n \in \mathbb{N}$ et soit \mathcal{B} une base de E . Alors l'application

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}} : E &\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x &\mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La linéarité ne présente aucune difficulté. Notons ensuite que :

$$x \in \text{Ker}(\text{mat}_{\mathcal{B}}) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0$$

ce qui entraîne l'injectivité. On conclut par égalité dimensionnelle. \square

On définit de la même façon la matrice d'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_k)$ dans une base \mathcal{B} comme la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les matrices des u_i dans la base \mathcal{B} .

▣ **Exemple XXI.2.** La matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de la famille $(1, 0, 1), (0, 2, 3)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

☞ **Remarque XXI.2.** On vérifie facilement que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$.

b) Matrices et applications linéaires

Définition XXI.1. Soit E (resp. F) un \mathbb{K} -e.v de dimension finie de dimension m (resp. n) et soit \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}') une base de E (resp. de F). Alors, on appelle **matrice** d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ **dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'** la matrice

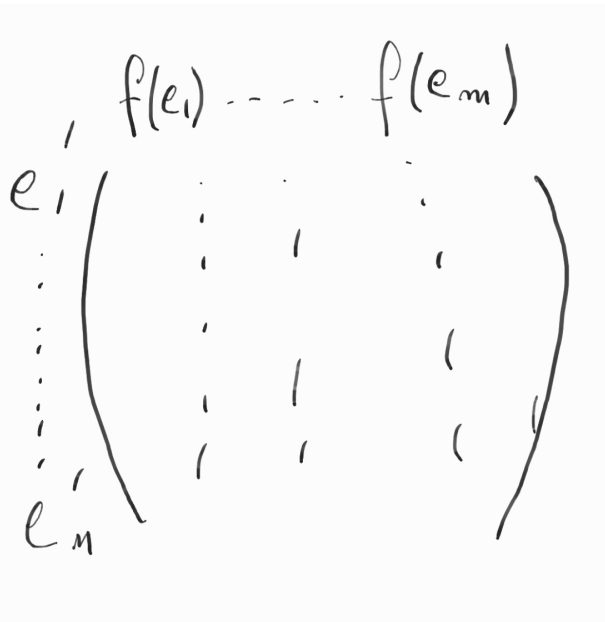
$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}).$$

Notation. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et que $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on notera $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Concrètement, cela signifie que les colonnes de cette matrice sont les matrices des images par f des vecteurs de \mathcal{B} dans la base \mathcal{B}' . Si on pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, alors le coefficient en position (i, j) de la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ sera la coordonnée selon e'_i du vecteur $f(e_j)$; i.e en notant $m_{i,j}$ ces coefficients on aura :

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, f(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e'_i.$$

Ceci signifie que la matrice aura donc globalement la tronche suivante :



▮▮▮ **Exemple XXI.3.** On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (2x + y, x + y, 3y).$$

Il est clair que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Posons $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$: il s'agit de bases respectives de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , avec :

$$f((1, 0)) = (2, 1, 0) = 2 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 1)$$

et

$$f((1, 1)) = (3, 2, 3) = 3 \cdot (1, 0, 0) - 1 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 1, 1).$$

De fait, on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

☞ **Remarque XXI.3.** Si E est un \mathbb{K} -e.v de dimension finie de dimension n et que \mathcal{B} est une base de E , alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = I_n$.

✖ **ATTENTION :** l'application identité ne donne pas toujours naissance à la matrice identité ; par exemple, si $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 1))$ on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition XXI.2. Soit E (resp. F) un \mathbb{K} -e.v de dimension finie de dimension m (resp. n) et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ (resp. $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$) une base de E (resp. de F). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $M = (m_{i,j})_{i,j}$ sa matrice dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Alors, si $x = \sum_{k=1}^m x_k e_k \in E$, on a :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} x_j e'_i.$$

Proposition XXI.3. Soient E, F deux \mathbb{K} -e.v de dimension finie de dimensions respectives m et n . Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' des bases respectives de E et F . Alors l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La linéarité se démontre par un calcul rapide. De plus, cette application est bijective car toute application linéaire est totalement déterminée par la donnée de l'image d'une base de son ensemble de départ. \square

\heartsuit **Remarque XXI.4.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$; alors d'après la proposition *supra*, il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ telle que A soit la matrice de f dans les bases canoniques respectives de \mathbb{K}^m et \mathbb{K}^n . Il nous est donc possible de poser $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(f)$, $\text{Im}(A) = \text{Im}(f)$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$. Ce paradigme est régulièrement utilisé aux concours pour identifier matrices et applications linéaires : f est alors appelée **application linéaire canoniquement associée à la matrice** A .

Dans ces conditions, il est clair que les colonnes de A forment une famille génératrice de l'image de f et que ses lignes donnent un système d'équations du noyau (se référer à la vision matricielle d'un système linéaire vue au chapitre XII).

On notera également que, quitte à identifier les vecteurs à des matrices colonnes, on a, pour tout $x \in \mathbb{K}^m$:

$$f(x) = Ax.$$

\heartsuit **Exercice XXI.1.** Déterminer l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi que son image et son noyau.

c) Composition et produit

Donnons nous trois \mathbb{K} -e.v de dimension finie E, F et G , de dimensions respectives p, q et r et munis respectivement de bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_q)$ et $\mathcal{B}'' = (e''_1, \dots, e''_r)$. Fixons ensuite $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et posons $A = (a_{i,j})_{i,j} = \text{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v)$ ainsi que $B = (b_{i,j})_{i,j} = \text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$. On a alors, pour

tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$\begin{aligned} v \circ u(e_j) &= v \left(\sum_{k=1}^q b_{k,j} e'_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^q b_{k,j} v(e'_k) \\ &= \sum_{k=1}^q b_{k,j} \sum_{i=1}^r a_{i,k} e''_i \\ &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j} \right) e''_i. \end{aligned}$$

Ceci signifie que la matrice de $v \circ u$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'' admet pour coefficient en position (i, j) , pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$\sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j},$$

et donc que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(v \circ u) = AB.$$

☞ **Remarque XXI.5.** Il découle de notre abominable laïus calculatoire que le produit matriciel présente de fortes similitudes avec la composition des applications linéaires. Plus précisément, et en conservant les notations *supra*, nous avons :

- (i) $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(v \circ u) = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(v) \times \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$;
- (ii) $\forall x \in E, \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u(x)) = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Ceci nous permet de retrouver que le produit matriciel est associatif et bilinéaire. Notons que le résultat du point (i) ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B}' et que le point (ii) sera **très** utile pour déterminer l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice.

Proposition XXI.4. Soit $n \geq 0$. Alors $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une algèbre. De plus, pour tout \mathbb{K} -e.v de dimension finie E de dimension n , l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est isomorphe (en tant qu'anneau et espace vectoriel) à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Il s'agit d'une synthèse des propriétés évoquées précédemment dans ce chapitre. Notons que le neutre pour le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice identité I_n . □

✘ **ATTENTION** : cette algèbre n'est évidemment **PAS** commutative dès que $n \geq 2$: en effet

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Inversibilité

Proposition XXI.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; alors est inversible pour le produit matriciel à gauche si et seulement si elle est inversible à droite.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors, A est inversible à gauche si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$. Ceci signifie que si $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est l'application linéaire canoniquement associée à B on a $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$: f est donc injective et donc, par égalité de dimensions, surjective. Il en découle que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$, i.e $AB = I_n$, d'où le résultat. \square

✂ **Remarque XXI.6.** Le groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est isomorphe au groupe $(GL(E), \circ)$ via restriction de l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, si $f \in GL(E)$ et que \mathcal{B} est une base de E on a $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

▣► **Exemple XXI.4.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; alors on a vu dans le chapitre XVIII que l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ étant dans $GL(E)$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Il en va donc de même pour l'inversibilité de A .

Proposition XXI.6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est inversible ;
- (ii) $\text{Ker}(A) = \{0\}$;
- (iii) les colonnes de A forment une base de \mathbb{K}^n .

Démonstration. Ceci découle de la proposition XIX.15. \square

✂ **Remarque XXI.7.** Ce résultat nous permet de retrouver la proposition XII.6 sur l'inversibilité des matrices triangulaires.

2. Changements de base

a) Matrices de passage

On fixe dans ce paragraphe un \mathbb{K} -e.v de dimension finie E de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Définition XXI.2. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . On appelle **matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'** la matrice

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

✂ **Remarque XXI.8.** On a donc $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$.

▮▮▮ **Exemple XXI.5.** La matrice de passage de $((1, 0), (0, 1))$ à $((1, 0), (1, 1))$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et celle de $((1, 0), (1, 1))$ à $((1, 0), (0, 1))$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition XXI.7. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E ; alors :

- (i) $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$;
- (ii) $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Démonstration. Nous savons que, d'après le lien produit-composition vu précédemment :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} &= \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E) \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E) \\ &= \text{mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E \circ \text{id}_E) \\ &= \text{mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) \\ &= I_n \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

L'usage principal à ce stade des matrices de passage sera, pour nous, le **changement de base**, *i.e* le procédé permettant de passer des coordonnées ou de la matrice d'un vecteur ou d'une application linéaire dans la base \mathcal{B}' à leur homologue dans \mathcal{B} . Ceci générera de nombreux calculs hilarants.

Proposition XXI.8. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et soit $x \in E$. Alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{mat}_{\mathcal{B}'}(x).$$

Démonstration. Toujours d'après les propriétés élémentaires du produit matriciel, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}}(x) &= \text{mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E(x)) \\ &= \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E) \text{mat}_{\mathcal{B}'}(x) \\ &= P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{mat}_{\mathcal{B}'}(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

▮▮▮ **Exemple XXI.6.** Pour obtenir les coordonnées d'un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $((1, 0), (1, 1))$ il nous suffit de calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}.$$

Proposition XXI.9. Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v de dimension finie ; soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ deux bases de E et $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F . Alors, pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(f) = P_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}_2} \text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}'_1}.$$

Démonstration. Commençons par noter que $f = \text{id}_F \circ f \circ \text{id}_E$; ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(f) &= \text{mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(\text{id}_F \circ f \circ \text{id}_E) \\ &= \text{mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_2}(\text{id}_F) \text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \text{mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1}(\text{id}_E) \\ &= P_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}_2} \text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}'_1} \end{aligned}$$

d'où, pour changer, le résultat. □

✂ **Remarque XXI.9.** Si $E = F$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'_2$, on a alors, en posant $P = P_{\mathcal{B}'_1}^{\mathcal{B}_1}$:

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'_1}(f) = P^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}_1}(f) P.$$

📄 **Exercice XXI.2.** Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base \mathcal{B}' de E et calculer la matrice de f dans celle-ci.

➡ **Correction :** On vérifie rapidement que \mathcal{B}' est libre et de cardinal 3 : il s'agit bien d'une base. Soit $P = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$; alors :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Trouver P^{-1} est relativement rapide et donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ne reste qu'à calculer

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

qui est la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .

b) Rang d'une matrice

Définition XXI.3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On appelle **rang** de A le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Notation. $\text{rg}(A)$

☞ **Remarque XXI.10.** Il s'agit *de facto* également du rang de l'application linéaire canoniquement associée à A . Il en découle qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son rang est égal à n .

☛ **Exemple XXI.7.** $\text{rg}(I_n) = n$, $\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\right) = 1$.

Proposition/définition XXI.4 (Matrice canonique d'une application linéaire). Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v de dimension finie de dimensions respectives m et n . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang $r \geq 0$; alors il existe une base \mathcal{B} de E et une base \mathcal{B}' de F telles que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = J_r$$

où J_r est la **matrice canonique de rang** r donnée par :

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

✖ **ATTENTION** : la matrice J_r dépend de n et m ...

Démonstration. D'après le théorème du rang, nous savons que $\dim(\text{Ker}(f)) = m - r$; fixons nous donc un supplémentaire G de ce dernier et une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ de E adaptée à la décomposition $E = G \oplus \text{Ker}(f)$. La famille $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_r)$ est donc libre et engendre G . De fait, elle n'intersecte pas $\text{Ker}(f)$, ce qui entraîne que $f(\mathcal{F})$ est libre car $f|_G$ est injective.

La famille $f(\mathcal{F})$ étant libre dans F , on peut la prolonger en une base de \mathcal{B}' de F . Il est alors aisé de vérifier que $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = J_r$. \square

c) Matrices équivalentes

Définition XXI.5. Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ sont dites **équivalentes** si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_m(\mathbb{K})$ tel que :

$$B = P^{-1}AQ.$$

☛ **Exemple XXI.8.** Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ deux bases d'un \mathbb{K} -e.v de dimension finie E et $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2$ deux bases d'un \mathbb{K} -e.v de dimension finie F . Alors, pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(f) = (P_{\mathcal{B}'_2}^{\mathcal{B}_2})^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}'_1}$$

et donc $\text{mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(f)$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$ sont équivalentes.

Proposition XXI.10. L'équivalence des matrices est une relation d'équivalence.

Démonstration. La démonstration de cette propriété fort surprenante est laissée en exercice au lecteur avide de savoir et d'eau fraîche. \square

Proposition XXI.11. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) A est équivalente à B ;
- (ii) A et B sont matrices d'une même application linéaire ;
- (iii) $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

Démonstration.

(i) \Rightarrow (ii) Soit f l'application canoniquement associée à A et notons \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{K}^m et \mathcal{B}' celle de \mathbb{K}^n ; nous avons donc $A = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$. Comme B est équivalente à A , il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_m(\mathbb{K})$ telles que $A = P^{-1}BQ$. Or P (resp. Q) peut être vue comme la matrice de passage $P_{\mathcal{B}' \mathcal{C}}$ (resp. $P_{\mathcal{D} \mathcal{B}}$), où \mathcal{C} (resp. \mathcal{D}) est la famille des colonnes de P (resp. Q), ces familles étant des bases de leurs espaces respectives par inversibilité de P et Q . Nous avons donc, *in fine* :

$$\begin{aligned} B &= P_{\mathcal{C} \mathcal{B}'}^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{D} \mathcal{B}} \\ &= \text{mat}_{\mathcal{D}, \mathcal{C}}(f) \end{aligned}$$

d'où le résultat souhaité.

(ii) \Rightarrow (iii) Soit f l'application canoniquement associée à A . Alors B est également matrice de f donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \text{rg}(B)$.

(iii) \Rightarrow (i) Soit f (resp. g) l'application linéaire canoniquement associée à A (resp. à B). Comme $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$, on a $\text{rg}(f) = \text{rg}(g)$ et donc f et g admettent pour matrice dans un certain couple de bases (potentiellement différentes pour l'une et l'autre) J_r avec $r = \text{rg}(A)$. De fait, A et B sont équivalentes à J_r . Par transitivité, A est donc équivalente à B . \square

\heartsuit **Remarque XXI.11.** Une conséquence importante de cette proposition est qu'une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r . De plus, toute matrice inversible est une matrice de passage.

La vision matricielle des opérations élémentaires introduite au chapitre XII nous permet de plus de démontrer la proposition suivante.

Proposition XXI.12. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ la matrice d'une application linéaire f . Alors :

- (i) les opérations élémentaires sur les colonnes de A préservent le rang et l'image de f ;
- (ii) les opérations élémentaires sur les lignes de A préservent le rang et le noyau de f .

Démonstration. Ces propriétés découlent du fait que multiplier par une matrice inversible ne modifie pas le rang et du lien entre produit et composée (pour la partie "image/noyau"). \square

Proposition XXI.13. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}(M^\top) = \text{rg}(M)$.

Démonstration. Soit $r = \text{rg}(M)$; alors on sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_m(\mathbb{K})$ telles que $M = P^{-1}J_rQ$ et donc :

$$\begin{aligned} M^\top &= (P^{-1}J_rQ)^\top \\ &= Q^\top J_r^\top (P^{-1})^\top \\ &= Q^\top J_r^\top (P^\top)^{-1} \end{aligned}$$

ce qui implique que M^\top est équivalente à J_r^\top (qui est elle-même une "matrice J_r ") et donc de rang r . \square

☞ **Remarque XXI.12.** Toute matrice est donc équivalente à sa transposée.

d) Matrices extraites

Définition XXI.6. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$; on appelle **matrice extraite** toute restriction de M à un ensemble de la forme $I \times J$, avec $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et $J \subset \llbracket 1, m \rrbracket$ **non vides**.

▣► **Exemple XXI.9.** Il s'agit en pratique de ne conserver que certaines lignes et colonnes de la matrice en question : les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont par exemple

extraites de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☞ **Remarque XXI.13.** Dans la définition *supra*, nous disposons de $2^n - 1$ choix pour I et $2^m - 1$ choix pour J : toute matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ admet donc $(2^n - 1)(2^m - 1)$ matrices extraites.

Proposition XXI.14. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice de rang $r \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- (i) il existe une matrice extraite de A appartenant à $GL_r(\mathbb{K})$;
- (ii) toutes les matrices extraites de A sont de rang inférieur ou égal à r .

Démonstration.

- (i) Par définition du rang, on peut trouver une famille libre de r vecteurs colonnes de la matrice A , ce qui permet d'extraire de A une matrice A' de taille $n \times r$ dont les colonnes forment une famille libre de r vecteurs de \mathbb{K}^n . Comme $\text{rg}(A'^\top) = \text{rg}(A') = r$, on peut extraire de A' r lignes formant une famille libre de \mathbb{K}^r , d'où le résultat.
- (ii) Immédiat.

□

3.- Similitude

a) Trace

Définition XXI.7. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **carrée**. On appelle **trace** de A la quantité :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

▮ **Exemple XXI.10.** $\text{Tr}(I_n) = n$, $\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}\right) = 4$.

Proposition XXI.15. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- (i) $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B)$;
- (ii) $\text{Tr}(A^\top) = \text{Tr}(A)$;
- (iii) $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Démonstration. Les point (i) et (ii) découlent directement de la définition. Pour le point (iii), remarquons que si on note $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$) les coefficients de A (resp. de B) on a :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}$$

et

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(BA) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{k,i} b_{i,k} \\ &= \operatorname{Tr}(AB)\end{aligned}$$

ce qui constitue le résultat voulu. \square

✎ **Remarque XXI.14.** La trace est donc une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition/définition XXI.8. Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie et soit \mathcal{B} une base de E . Alors, si $f \in \mathcal{L}(E)$, la quantité $\operatorname{Tr}(\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f))$ est indépendante du choix de la base \mathcal{B} et est appelée **trace** de f .

Notation. $\operatorname{Tr}(f)$

Démonstration. Fixons \mathcal{B}' une base de E et posons $M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $M' = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. Alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(M') &= \operatorname{Tr}(P^{-1}MP) \\ &= \operatorname{Tr}(PP^{-1}M) \\ &= \operatorname{Tr}(M).\end{aligned}$$

\square

Proposition XXI.16. On a les égalités suivantes :

- (i) $\operatorname{Tr}(\operatorname{id}_E) = \dim(E)$;
- (ii) si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Tr}(u \circ v) = \operatorname{Tr}(v \circ u)$;
- (iii) soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur ; alors $\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

Démonstration.

- (i) Si \mathcal{B} est une base de E $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\operatorname{id}_E) = I_n$, d'où le résultat.
- (ii) Passer par les matrices.
- (iii) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$. Alors, si $k = \dim(\operatorname{Ker}(p))$ on a :
 - (i) $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $p(e_i) = 0$;
 - (ii) $\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$, $p(e_i) = e_i$.

On a donc :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array} \right)$$

ce qui implique que $\operatorname{Tr}(p) = n - k = \operatorname{rg}(p)$.

\square

✎ **Exercice XXI.3.** Que dire de la trace d'une symétrie ?

b) Matrices semblables

Définition XXI.9. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

✂ **Remarque XXI.15.** Deux matrices semblables sont équivalentes. La réciproque est évidemment fausse.

▮► **Exemple XXI.11.** Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases d'un \mathbb{K} -e.v de dimension finie E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, si on pose $P = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)P$$

et donc $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sont semblables. Réciproquement deux matrices semblables sont matrices d'un même **endomorphisme** dans deux bases (et non deux couples de bases, attention) différents.

Proposition XXI.17. La similitude des matrices est une relation d'équivalence.

Démonstration. Voici un fort bel exercice pour notre lecteur favori. Have fun. \square

✂ **Remarque XXI.16.** Si A et B sont deux matrices semblables, alors leurs puissances le sont également (à vérifier par récurrence).

Proposition XXI.18. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

Vocabulaire. On dit que la trace est un **invariant de similitude**.

Démonstration. Par similitude, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(B) &= \text{Tr}(P^{-1}AP) \\ &= \text{Tr}(PP^{-1}A) \\ &= \text{Tr}(A) \end{aligned}$$

youpi. \square

✘ **ATTENTION :** la réciproque est brutalement fausse : la matrice nulle et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ont la même trace sans être semblables.

4. Compléments sur les systèmes linéaires

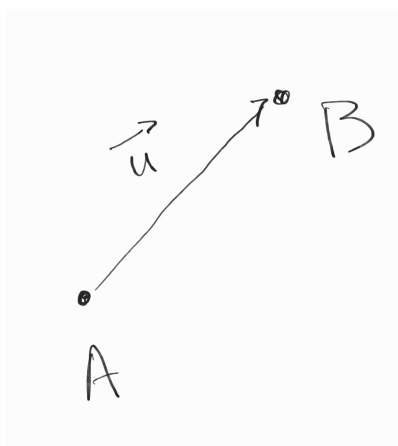
a) Sous-espaces affines d'un \mathbb{K} -e.v

L'objet de ce paragraphe est d'introduire, sans excès de technicité, la notion de sous-espace affine d'un \mathbb{K} -e.v. Nous fixons donc dans celui-ci un \mathbb{K} -e.v E .

La **structure affine d'un espace vectoriel** est, à notre niveau, un paradigme visant à distinguer au sein de celui-ci deux types d'objets essentiels : les **points** et les **vecteurs**. Nous appuyant sur les connaissances existantes du lecteur, nous noterons, pour $A, B \in E$

$$B = A + \vec{u}$$

pour signifier que l'objet \vec{u} ainsi (informellement) défini est le vecteur (au sens vu dans l'enseignement secondaire) \overrightarrow{AB} . Notons que l'ensemble \vec{E} des vecteurs (affines) de E peut être identifié à $\dots E$. Nous conserverons toutefois une notation différente pour celui-ci, afin de préserver la santé mentale du lecteur.



Définition XXI.10. Soit \vec{u} un vecteur (affine) de E . On appelle **translation** associée à \vec{u} l'application

$$\begin{aligned} \tau_{\vec{u}} : E &\rightarrow E \\ A &\mapsto A + \vec{u}. \end{aligned}$$

▮▮▮ **Exemple XXI.12.** Visualiser la translation de vecteur $\vec{u} = (1, 1)$ dans \mathbb{R}^2 .

Définition XXI.11. Soit \vec{F} un s-e.v de \vec{E} et soit $A \in E$. On appelle **sous-espace affine de direction \vec{F} passant par A** l'ensemble :

$$A + \vec{F} = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in \vec{F}\}.$$

✂ **Remarque XXI.17.** On a donc :

$$A + \vec{F} = \{\tau_{\vec{u}}(A) \mid \vec{u} \in \vec{F}\}.$$

Vocabulaire. Un sous-espace affine dirigé par une droite (resp. un plan, un hyperplan) est appelé droite (resp. plan, hyperplan) affine. De façon générale, on appelle **dimension** d'un tel espace la dimension (éventuellement infinie) de sa direction.

▣► **Exemple XXI.13.** Les sous-espaces affines de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 ont été étudiés par le lecteur en terminale.

✂ **Remarque XXI.18.** L'intersection de deux sous-espaces affines est soit vide, soit un sous-espace affine.

Proposition XXI.19. Soit F un \mathbb{K} -e.v, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $A \in F$. Alors l'ensemble

$$u^{-1}(\{A\}) = \{x \in E \mid u(x) = A\}$$

est soit vide, soit un sous-espace affine de E dirigé par $\text{Ker}(u)$.

Démonstration. Supposons $u^{-1}(\{A\})$ non vide et fixons $x_0 \in u^{-1}(\{A\})$. Alors, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in u^{-1}(\{A\}) &\Leftrightarrow u(x) = A \\ &\Leftrightarrow u(x) = u(x_0) \\ &\Leftrightarrow x - x_0 \in \text{Ker}(u) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

✂ **Remarque XXI.19.** Ceci entraîne que si (\mathcal{E}) est une équation différentielle linéaire sur un intervalle I , alors $\text{Sol}_{\mathcal{E}}$ est un sous-espace affine de \mathbb{K}^I de direction $\text{Sol}_{\mathcal{H}}$ (où (\mathcal{H}) est l'équation homogène associée à (\mathcal{E})), passant par une solution particulière de (\mathcal{E}) . La dimension de $\text{Sol}_{\mathcal{E}}$ est de plus égale à l'ordre de l'équation. Nous laissons le lecteur énoncer (et vérifier !) un résultat analogue relatif aux suites récurrentes linéaires.

b) Structure de l'espace des solutions d'un système linéaire

Avec le recul dont nous disposons désormais, la résolution d'un système linéaire à p équations et q inconnues peut être interprétée de quatre façons différentes :

- naïvement : on résout un paquet d'équations linéaires simultanément ;
- géométriquement : chaque équation du système décrit un hyperplan (éventuellement affine) de \mathbb{K}^q . Nous recherchons donc une intersection de p tels objets (voir aussi la proposition [XIX.17](#)).
- matriciellement : on résout une équation matricielle à une inconnue, elle aussi matricielle ;
- s'appuyant sur le point précédent, on peut voir que résoudre un tel système s'apparente à résoudre une équation du type $f(x) = b$ avec $b \in \mathbb{K}^p$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$.

Définition XXI.12. On considère un système linéaire $AX = B$. Alors on appelle **rang** du système la quantité $\text{rg}(A)$.

☞ **Remarque XXI.20.** Si le système possède p équations et q inconnues, alors son rang est inférieur ou égal à $\min(p, q)$.

Proposition XXI.20. On considère un système linéaire homogène à p équations et q inconnues

$$(\mathcal{H}) \quad AX = 0$$

de rang r . Alors l'espace $\text{Sol}_{\mathcal{H}}$ des solutions de celui-ci est un s-e.v de \mathbb{K}^q de dimension $q - r$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = r$ et l'ensemble des solutions de (\mathcal{H}) est isomorphe (via l'application associant à un vecteur sa matrice dans la base canonique de \mathbb{K}^q) à $\text{Ker}(f)$. Le résultat suit par théorème du rang (XIX.14). \square

☞ **Remarque XXI.21.**

- On a naturellement $\text{Sol}_{\mathcal{H}} = \text{Ker}(A)$.
- Si $p < q$ (moins d'équations que d'inconnues), alors $r \leq p < q$ et donc $\dim(\text{Sol}_{\mathcal{H}}) > 0$. Le système (\mathcal{H}) admet donc automatiquement une infinité de solutions non triviales.

Proposition XXI.21. On considère un système linéaire à p équations et q inconnues

$$(\mathcal{S}) \quad AX = B$$

de rang r que l'on suppose **compatible**. Alors, l'espace $\text{Sol}_{\mathcal{S}}$ des solutions de (\mathcal{S}) est un sous-espace affine de dimension $q - r$ de \mathbb{K}^q dirigé par $\text{Sol}_{\mathcal{H}}$. Plus précisément, si $X_0 \in \text{Sol}_{\mathcal{S}}$, on a :

$$\text{Sol}_{\mathcal{S}} = X_0 + \text{Sol}_{\mathcal{H}}.$$

Démonstration. Ceci découle de la proposition XXI.19 appliquée à l'application canoniquement associée à A . \square

☞ **Remarque XXI.22.** Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \text{Im}(A)$.

c) Systèmes de Cramer

Rappelons (cf. chapitre XII) qu'un système de Cramer est un système linéaire de la forme $AX = B$ avec $A \in GL_p(\mathbb{K})$. Reprenant les notations du paragraphe précédent, nous avons donc $p = q = r$. Un tel système admet toujours une unique solution, donnée par $X = A^{-1}B$.

Proposition XXI.22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $A \in GL_n(\mathbb{K})$;
- (ii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ est compatible ;
- (iii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution ;
- (iv) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, si le système $AX = B$ admet un solution, celle-ci est unique ;
- (v) l'ensemble des solutions du système $AX = 0$ est réduit à $\{0\}$.

Démonstration. Soit f l'application canoniquement associée à A ; on peut alors traduire les propriétés énoncées comme suit :

- (i) f est bijective ;
- (ii) f est surjective ;
- (iii) f est bijective ;
- (iv) f est injective ;
- (v) $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Or, nous avons que ces propriétés sont équivalentes car f est un endomorphisme de \mathbb{K}^n , d'où le résultat. \square