

# Chapitre XX

## Intégration

### 0. Continuité uniforme

On fixe dans ce paragraphe un intervalle  $I$  d'intérieur non vide.

**Définition XX.1.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **uniformément continue** (u.c) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

☛ **Exemple XX.1.** Si  $a \in \mathbb{R}^*$ , la fonction  $x \mapsto ax$  est u.c : il suffit, à  $\varepsilon$  fixé de poser  $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ .

☞ **Remarque XX.1.** Notons la différence avec la définition de continuité sur  $I$ , qui est (rappelons le) :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in I, (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Dans le cas de la continuité "simple",  $\delta$  dépend du point  $x$  où l'on étudie la continuité. Dans le cas uniforme, il est... uniforme relativement à celui-ci.

**Proposition XX.1.** Toute fonction u.c sur  $I$  est continue sur cet intervalle.

*Démonstration.* Découle immédiatement de la remarque *supra*. □

✘ **ATTENTION :** la réciproque est **fausse**. Pour un contre exemple, considérons la fonction (continue)  $x \mapsto x^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  et fixons  $\delta > 0$ . Comme  $(2x + \delta)\delta \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ , il existe  $x \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$(2x + \delta)\delta > 1.$$

En posant  $y = x + \delta$  on a à la fois  $|x - y| \leq \delta$  et

$$|x^2 - y^2| = |x^2 - x^2 - 2x\delta - \delta^2| = (2x + \delta)\delta > 1$$

ce qui contredit la définition de continuité uniforme pour  $\varepsilon = 1$ .

**Proposition XX.2.** Toute fonction lipschitzienne est u.c.

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction lipschitzienne : il existe donc  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  ; alors, en posant  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$  on a bien

$$\forall x, y \in I, (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

□

✘ **ATTENTION** : une fois encore, la réciproque est fumeuse. L'exercice *infra* fournit un contre exemple (presque) gratuit.

🔗 **Exercice XX.1.** On considère la fonction

$$g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \quad .$$

- (a) Démontrer que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

(b) En déduire que  $g$  est u.c. sur  $\mathbb{R}_+$ .

- Démontrer  $g$  n'est pas lipschitzienne sur  $\mathbb{R}_+$ . On pourra considérer le taux d'accroissement de  $g$  en 0.

Le point culminant (et pertinent vis à vis du programme) est le résultat suivant, dont la démonstration est admise. Il est du au mathématicien allemand Eduard Heine (1821—1881).

**Théorème XX.3** (Heine).

Toute fonction continue sur un segment  $y$  est uniformément continue.

🔗 **Exercice XX.2.** La démonstration de ce résultat est tout à fait abordable en MPSI. Le lecteur curieux pourra s'y essayer via cet exercice. Fixons deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  et une fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et procédons par l'absurde en supposant que  $f$  n'est pas u.c. sur  $[a, b]$ .

- Démontrer qu'il existe dans ce cas un réel  $\varepsilon > 0$  et deux suites  $(x_n)_n, (y_n)_n$  d'éléments de  $[a, b]$  tels que

$$\forall n \geq 1, \quad \left( |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \right) \wedge (|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon).$$

- Montrer qu'il existe une fonction strictement croissante  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $(x_{\varphi(n)})_n$  converge vers un nombre réel  $\ell$ .
  - Justifier que  $\ell \in [a, b]$ .
  - Démontrer que la suite  $(y_{\varphi(n)})_n$  converge également vers  $\ell$ .
  - Déterminer la limite, quand  $n$  tend vers l'infini, de la quantité  $|f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})|$ .
- Conclure.

## 1. Intégrale des fonctions en escalier

On fixe dans ce paragraphe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ .

### a) Subdivisions, fonctions en escalier

**Définition XX.2.** On appelle **subdivision** du segment  $[a, b]$  toute famille  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de points de celui-ci tels que :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

☞ **Remarque XX.2.** Il s'agit donc de "délimiter"  $n$  sous-segments au segment  $[a, b]$ .

**Notation.** On notera  $S(a, b)$  l'ensemble des subdivisions du segment  $[a, b]$ .

☛ **Exemple XX.2.**

- $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$  est une subdivision relativement aisée à visualiser du segment  $[0, 1]$ ;
- pour  $n \geq 1$ , on appelle **subdivision régulière** du segment  $[a, b]$  de rang  $n$  la subdivision

$$\sigma_{\mathcal{R}}^n(a, b) = \left( a + k \frac{b-a}{n} \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}.$$

**Définition XX.3.** Soit  $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in S(a, b)$ . On appelle :

- **pas** de  $\sigma$  la quantité  $\mu(\sigma) = \max\{x_{i+1} - x_i \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ ;
- **support** de  $\sigma$  l'ensemble  $\text{supp}(\sigma) = \{x_i \mid i \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ .

☛ **Exemple XX.3.** Le pas de  $\sigma_{\mathcal{R}}^n(a, b)$  est  $\frac{b-a}{n}$ .

**Définition XX.4.** Soient  $\sigma, \sigma' \in S(a, b)$ . On dit que  $\sigma$  est **plus fine** que  $\sigma'$  si  $\text{supp}(\sigma') \subset \text{supp}(\sigma)$ .

**Notation.**  $\sigma' \prec \sigma$

☞ **Remarque XX.3.** Cela signifie que  $\sigma$  contient *a minima* tous les points de  $\sigma'$ .

☛ **Exemple XX.4.**  $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) \prec \sigma_{\mathcal{R}}^4(0, 1)$ .

☞ **Remarque XX.4.** Il s'agit d'un ordre non total sur  $S(a, b)$ .

**Proposition XX.4.** Soient  $\sigma, \sigma' \in S(a, b)$ . Alors il existe une subdivision  $\sigma''$  telle que  $\sigma \prec \sigma''$  et  $\sigma' \prec \sigma''$ .

*Démonstration.* Il suffit de choisir  $\sigma''$  de façon à ce que  $\text{supp}(\sigma'') = \text{supp}(\sigma) \cup \text{supp}(\sigma')$ .  $\square$

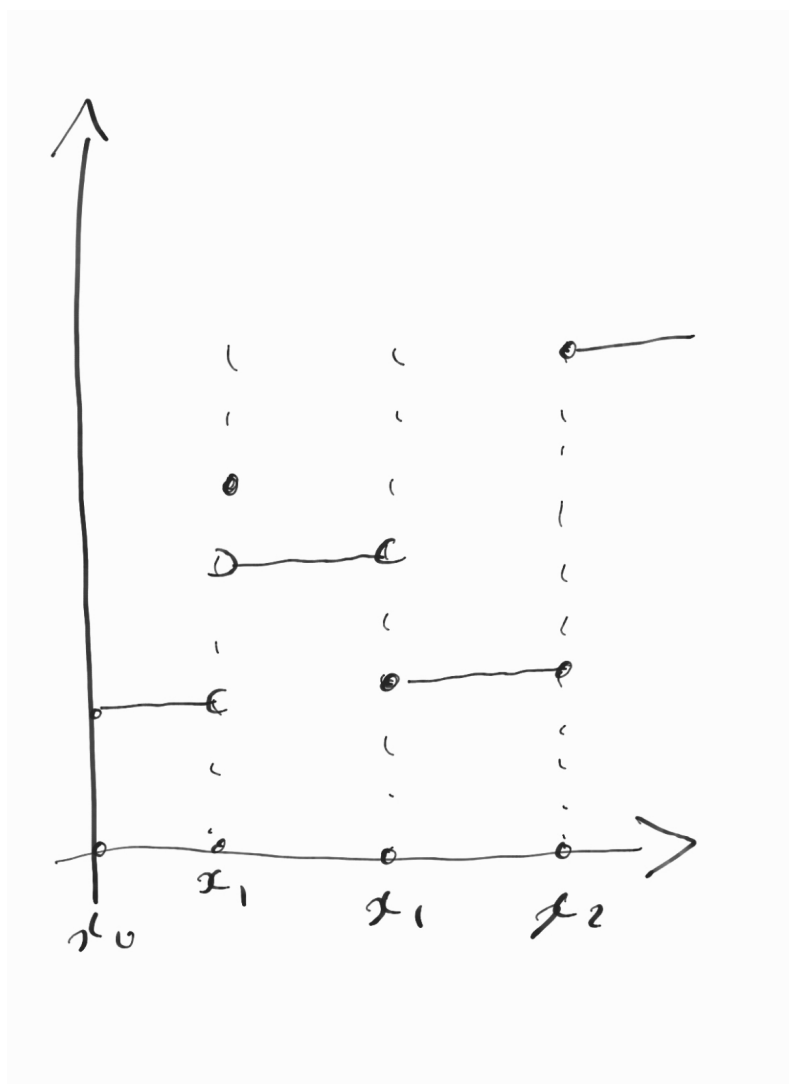
Ces définitions liminaires nous permettent (enfin) de rentrer dans le cœur de notre sujet à ce stade, en l'occurrence les fonctions en escalier.

**Définition XX.5.** Une fonction  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **en escalier** si il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in S(a, b)$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \text{ la fonction } \phi|_{]x_i, x_{i+1}[} \text{ est constante.}$$

**Notation.** On notera  $\mathcal{E}(a, b)$  l'ensemble des fonctions en escalier sur  $[a, b]$ .

**Vocabulaire.** Une subdivision vérifiant les conditions de la définition [XX.5](#) est dite **adaptée** à la fonction  $\phi$ . Notons que si  $\sigma$  est adaptée, alors toute subdivision  $\sigma'$  plus fine que  $\sigma$  l'est également.



▮► **Exemple XX.5.** La fonction partie entière est en escalier sur  $[-5, 12]$  (par exemple), relativement à toute subdivision dont le support contient  $\mathbb{Z}$ .

📖 **Remarque XX.5.**

- $(\mathcal{E}(a, b), +, \cdot)$  (resp.  $(\mathcal{E}(a, b), +, \times)$ ) est un s-e.v (resp. un sous-anneau) de  $\mathbb{R}^{[a, b]}$ . Lorsque ces deux structures sont présentes, on parle de **sous-algèbre**.
- Les seules fonctions en escalier continues sont constantes.

## b) Intégrale d'une fonction en escalier

**Proposition/définition XX.6.** Soit  $\phi \in \mathcal{E}(a, b)$  et soit  $\sigma \in S(a, b)$  une subdivision adaptée à  $\phi$ . Pour  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on note  $y_i$  la valeur de la fonction (constante)  $\phi|_{]x_i, x_{i+1}[}$ . Alors la quantité

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i (x_{i+1} - x_i)$$

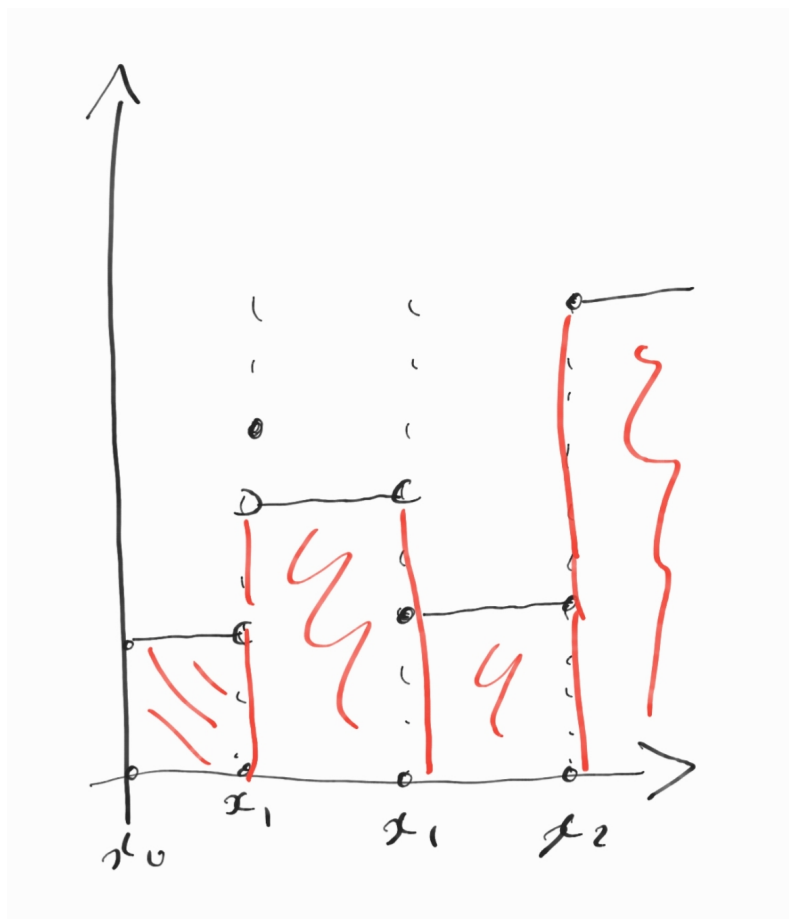
ne dépend pas de  $\sigma$  et est appelée **intégrale** de  $\phi$  sur le segment  $[a, b]$ .

*Démonstration.* Il est clair que cette quantité est inchangée si l'on passe à une subdivision plus fine que  $\sigma$ . Si  $\sigma'$  est une autre subdivision adaptée à  $\phi$  qui n'est pas plus fine que  $\sigma$ , on utilise la proposition [XX.4](#) pour régler la question.  $\square$

**Notation.** Les **seules** notations tolérées par le programme de MPSI sont :

$$\int_{[a, b]} \phi, \quad \int_a^b \phi \quad \text{et} \quad \int_a^b \phi(t) dt.$$

Géométriquement, l'intégrale d'une fonction en escalier correspond à l'aire (algébrique) délimitée par la courbe de  $f$  (ignorant les discontinuités) et l'axe des abscisses.



▣▣▣▣ Exemple XX.6.

$$\int_{-1}^7 [x] dx = \sum_{i=-1}^6 i(i+1-i) = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20.$$

**Proposition XX.5.** Soient  $\phi, \psi \in \mathcal{E}(a, b)$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

(i)

$$\int_{[a,b]} \phi + \lambda\psi = \int_{[a,b]} \phi + \lambda \int_{[a,b]} \psi; \quad \text{[linéarité]}$$

(ii)

$$(\phi \leq \psi) \Rightarrow \left( \int_{[a,b]} \phi \leq \int_{[a,b]} \psi \right); \quad \text{[croissance]}$$

(iii)

$$\left| \int_{[a,b]} \phi \right| \leq \int_{[a,b]} |\phi|. \quad \text{[inégalité triangulaire]}$$

*Démonstration.*

- (i) Trivial, quitte à utiliser la proposition **XX.4** pour matérialiser une subdivision adaptée à  $\phi$  et  $\psi$ .

(ii) Par définition de l'intégrale, on a que si  $\phi - \psi \leq 0$  alors  $\int_a^b \phi - \psi \leq 0$ . On conclut par linéarité.

(iii) On sait que  $\phi \leq |\phi|$  et  $-\phi \leq |\phi|$ . De fait, par croissance et linéarité :

$$\int_a^b \phi \leq \int_a^b |\phi| \quad \text{et} \quad -\int_a^b \phi = \int_a^b (-\phi) \leq \int_a^b |\phi|$$

d'où le résultat. □

La proposition suivante est souvent appelée "formule de Chasles", de part sa similarité avec la relation vectorielle éponyme. Elle n'a cependant rien à voir avec Michel Chasles, mathématicien français (1793—1880) connu pour ses travaux en géométrie projective et analyse harmonique.

**Proposition XX.6** ("Chasles"). Soit  $c \in [a, b]$  et soit  $\phi \in \mathcal{E}(a, b)$ . Alors :

$$\int_a^b \phi = \int_a^c \phi + \int_c^b \phi.$$

*Démonstration.* Il suffit de fixer une subdivision adaptée à  $[a, c]$  et  $[c, b]$ . □

✂ **Remarque XX.6.** Il est possible d'assouplir quelque peu notre notation en posant (rappelons que  $a < b$ ) :

$$\int_b^a \phi = -\int_a^b \phi.$$

Les propriétés vues précédemment, formule de "Chasles" comprise, se généralisent sans guère de soucis à la condition de **prendre garde au sens des inégalités** : l'intégrale "à l'envers" est décroissante et non croissante. Notons au passage que l'on obtient :

$$\int_a^a \phi = \int_a^b \phi + \int_b^a \phi = 0.$$

## 2. Intégrale de Riemann

On fixe dans ce paragraphe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ .

### a) Fonctions continues par morceaux

**Définition XX.7.** Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **continue par morceaux** si il existe  $\sigma = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in S(a, b)$  telle que :

- $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f \in \mathcal{C}^0(]x_i, x_{i+1}[)$  ;
- $f$  admet des limites **réelles** (non nécessairement égales) à gauche et à droite en  $x_1, \dots, x_{n-1}$  ;
- $f$  admet une limite **réelle** à gauche en  $b$  et à droite en  $a$ .

**Vocabulaire.** Toute subdivision satisfaisant ces propriétés est dite **adaptée** à  $f$ .

**Notation.** On note  $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$  l'ensemble des fonctions continue par morceaux sur  $[a, b]$ .

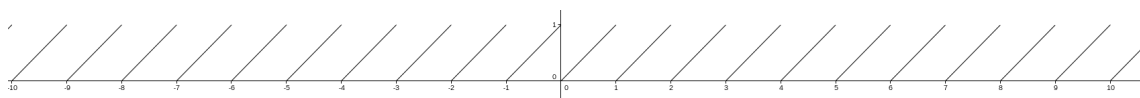
▮▮▮ **Exemple XX.7.**

- les fonctions continues sont continue par morceaux ;
- les fonctions en escalier sont continue par morceaux ;
- la fonction

$$f : [-100, 100] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x - [x]$$

est continue par morceaux .



- La fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

n'est **pas** continue par morceaux sur  $[0, 1]$  car elle n'admet pas de limite à droite en 0.

✂ **Remarque XX.7.**  $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$  est une sous-algèbre de  $\mathbb{R}^{[a, b]}$  contenant  $\mathcal{E}(a, b)$  et  $\mathcal{C}^0([a, b])$ .

**Définition XX.8.** Une fonction est dite continue par morceaux sur  $I$  si elle l'est sur tout segment inclus dans  $I$ .

▮▮▮ **Exemple XX.8.** La fonction  $f$  *supra* est en fait continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème XX.7** (Densité des fonctions en escalier).

Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe deux fonctions en escalier  $\phi, \psi \in \mathcal{E}(a, b)$  telles que :

- (i)  $\phi \leq f \leq \psi$  ;
- (ii)  $0 \leq \psi - \phi \leq \varepsilon$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Commençons par remarquer qu'il nous suffit de définir  $\phi$  et  $\psi$  sur chacun des intervalles de continuité de  $f$  : nous pouvons donc légitimement supposer  $f$  continue sur le segment  $[a, b]$  et donc, par théorème de Heine (XX.3) uniformément continue sur ce dernier. Nous obtenons de fait l'existence de  $\delta > 0$  tel que :

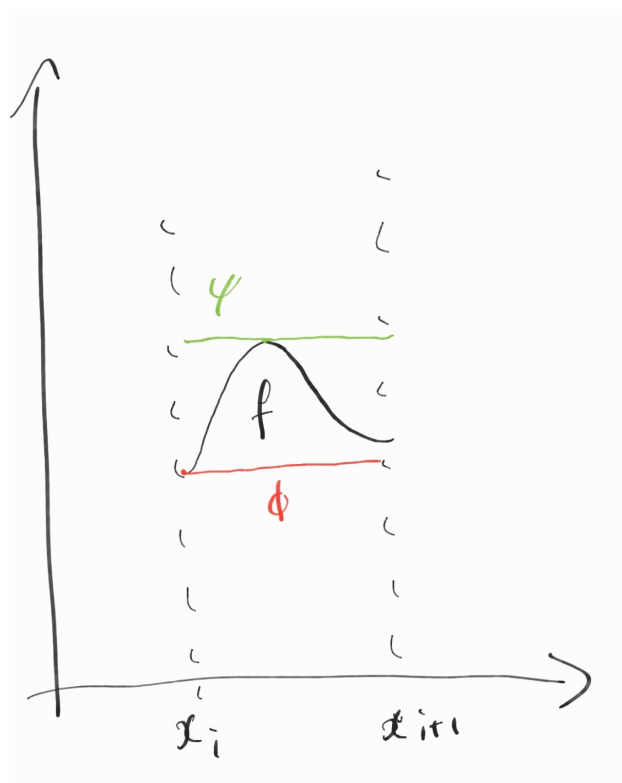
$$\forall x, y \in [a, b], (|x - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Donnons nous à présent une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in S(a, b)$  telle que  $\mu(\sigma) \leq \delta$  et posons :

$$\begin{aligned} \phi : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \min f_{[x_i, x_{i+1}[} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[ \text{ avec } i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \psi : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \max f_{[x_i, x_{i+1}[} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[ \text{ avec } i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases} \end{aligned}$$



Notons que  $\phi$  (resp.  $\psi$ ) constitue une approximation de  $f$  par défaut (resp. excès) sur les intervalles  $[x_i, x_{i+1}[$ . On a donc immédiatement que  $\phi \leq f \leq \psi$  sur  $[a, b]$  et, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $x \in [x_i, x_{i+1}[$  :

$$\psi(x) - \phi(x) = \max f_{[x_i, x_{i+1}[} - \min f_{[x_i, x_{i+1}[} \leq \varepsilon$$

par continuité uniforme ( $|x_{i+1} - x_i| \leq \delta$  par construction). L'inégalité étant triviale en  $x = b$ , on a bien  $0 \leq \psi - \phi \leq \varepsilon$  sur  $[a, b]$ , d'où le résultat.  $\square$

## b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

**Notation.** Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$ . Comme  $f$  est bornée sur chacun des ses intervalles de continuité, elle l'est sur  $[a, b]$ ; nous pouvons donc poser :

$$E_-(f) = \left\{ \int_{[a, b]} \phi \mid \phi \in \mathcal{E}(a, b), \phi \leq f \right\}$$

et

$$E_+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \phi \mid \phi \in \mathcal{E}(a,b), \phi \geq f \right\}.$$

**Proposition XX.8.** Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b])$ ; alors :

- (i)  $E_-(f)$  admet une borne supérieure;
- (ii)  $E_+(f)$  admet une borne inférieure;
- (iii)  $\sup(E_-(f)) = \inf(E_+(f))$ .

*Démonstration.* Les deux ensembles  $E_+(f)$  et  $E_-(f)$  sont des parties de  $\mathbb{R}$  non vides : en effet,  $f$  est bornée donc il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall x \in [a,b], |f(x)| \leq M$  et donc  $E_-(f)$  resp.  $(E_+(f))$  contient la fonction  $x \mapsto -M$  (resp.  $x \mapsto M$ ).

Soient à présent  $x \in E_-(f)$  et  $y \in E_+(f)$ . Alors, il existe  $\phi, \psi \in \mathcal{E}(a,b)$  telles que  $\phi \leq f \leq \psi$ ,  $x = \int_{[a,b]} \phi$  et  $y = \int_{[a,b]} \psi$ . De fait, par croissance de l'intégrale  $x \leq y$  et donc les bornes voulues existent (tout élément de  $E_-(f)$  minore  $E_+(f)$  et tout élément de  $E_+(f)$  majore  $E_-(f)$ ) et  $\sup(E_-(f)) \leq \inf(E_+(f))$ .

Pour obtenir l'égalité, fixons  $n \geq 1$  et notons que nous avons l'existence, par théorème **XX.7**, de deux fonctions en escalier  $\phi, \psi \in \mathcal{E}(a,b)$  telles que  $\phi \leq f \leq \psi$  et  $\psi - \phi \leq \frac{1}{n(b-a)}$ . On a, par croissance de l'intégrale sur les fonctions en escalier :

$$0 \leq \underbrace{\int_a^b \psi}_{\geq \inf(E_+(f))} - \underbrace{\int_a^b \phi}_{\leq \sup(E_-(f))} \leq \int_a^b \frac{1}{n(b-a)} = \frac{1}{n}$$

ce qui entraîne que :

$$\inf(E_+(f)) - \sup(E_-(f)) \leq \frac{1}{n}$$

et donc, en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient l'inégalité désirée.  $\square$

**Définition XX.9.** Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a,b])$ ; la quantité  $\sup(E_-(f)) = \inf(E_+(f))$  est appelée **intégrale** de  $f$  sur le segment  $[a,b]$ .

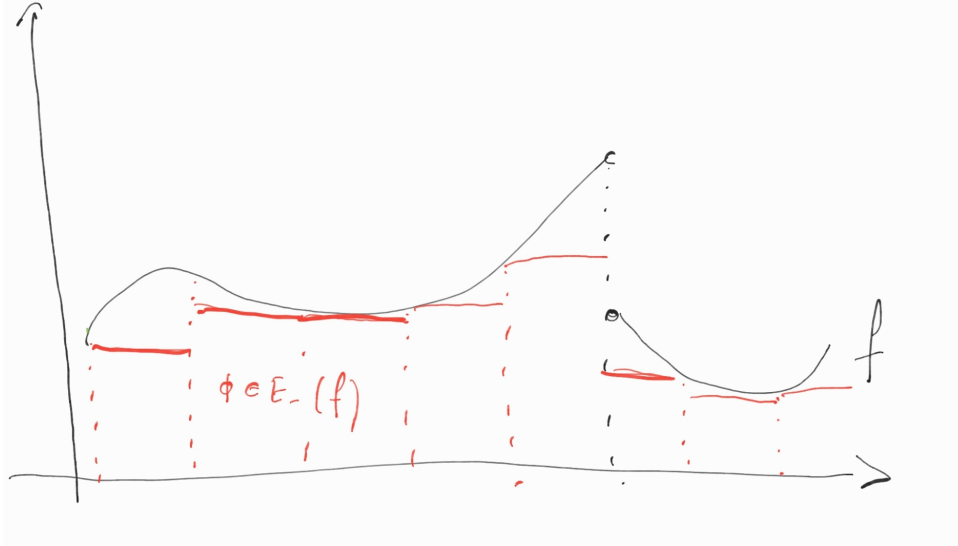
**Notation.** Une nouvelle fois, les **seules** notations tolérées par le programme de MPSI sont :

$$\int_{[a,b]} f, \quad \int_a^b f \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt.$$

**Remarque XX.8.**

- Notons que si  $f$  est en escalier, les bornes de  $E_+(f)$  et  $E_-(f)$  sont atteintes : nos deux définitions d'intégrales coïncident bien. Notre psychologue peut s'autoriser un soupir de soulagement.

- Une fonction "pas trop mal choisie" dans  $E_-(f)$  est une fonction en escalier "aussi proche que possible" de  $f$  tout en restant au-dessous du point de vue des courbes : approcher l'intégrale de  $f$  par celle de cette fonction revient donc à appliquer à  $f$  une méthode des rectangles par défaut. Même chose avec  $E_+(f)$  et la méthode par excès.



- On appelle **valeur moyenne** de  $f$  la quantité

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

✎ **Exercice XX.3.** Déterminer  $\int_0^1 x^2 dx$ .

➔ **Correction :** Soit  $n \geq 1$  ; on pose  $\sigma = \left( \frac{k}{n} \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et

$$\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \left( \frac{k}{n} \right)^2 & \text{si } x \in \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[ \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

ainsi que :

$$\psi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \left( \frac{k+1}{n} \right)^2 & \text{si } x \in \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[ \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

On a alors clairement  $\forall x \in [0, 1], \phi(x) \leq x^2 \leq \psi(x)$  et :

$$\int_0^1 \phi(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{k}{n} \right)^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

et

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{k+1}{n} \right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Ceci entraîne que

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

et donc, par théorème d'encadrement des limites (VII.11) :

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

### c) Propriétés de l'intégrale

Dans ce paragraphe, nous étendons à l'intégrale des fonctions continue par morceaux les propriétés observées dans le cas des fonctions en escalier. Sans surprise, tout ceci requiert un usage massif du théorème XX.7.

#### ◇ Linéarité

**Proposition XX.9.** Soient  $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.$$

*Démonstration.* Traitons le cas  $\lambda \geq 0$ . Soit  $n \geq 1$ ; alors, par théorème XX.7, il existe  $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{E}(a, b)$  telles que  $\phi_1 \leq f \leq \psi_1$ ,  $\phi_2 \leq g \leq \psi_2$ ,  $\psi_1 - \phi_1 \leq \frac{1}{n}$  et  $\psi_2 - \phi_2 \leq \frac{1}{n}$ . De fait, par croissance et linéarité de l'intégrale sur les fonctions en escalier, on a :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (f + \lambda g) - \left( \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g \right) &\leq \int_{[a,b]} (\psi_1 + \lambda \psi_2) - \left( \int_{[a,b]} \phi_1 + \lambda \int_{[a,b]} \phi_2 \right) \\ &= \int_{[a,b]} (\psi_1 - \phi_1) + \lambda \int_{[a,b]} (\psi_2 - \phi_2) \\ &\leq (b-a) \frac{2}{n} \end{aligned}$$

et, de la même façon :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (f + \lambda g) - \left( \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g \right) &\geq \int_{[a,b]} (\phi_1 + \lambda \phi_2) - \left( \int_{[a,b]} \psi_1 + \lambda \int_{[a,b]} \psi_2 \right) \\ &\geq (a-b) \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu en faisant tendre  $n$  vers l'infini via le théorème d'encadrement des limites (VII.11). □

## ◇ Croissance, inégalité triangulaire

**Proposition XX.10.** Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$  une fonction à valeurs positives. Alors :

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

*Démonstration.* La fonction nulle est une fonction en escalier minorant  $f$  : elle appartient donc à  $E_-(f)$ . De fait :

$$\int_a^b f(t) dt = \sup(E_+(f)) \geq \int_a^b 0 dt = 0.$$

□

✘ **ATTENTION** : la réciproque est **FAUSSE** : l'intégrale de  $x \mapsto x$  entre  $-1$  et  $1$  est positive sans que cette fonction ne le soit.

**Corollaire XX.10.a.** Soient  $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$ . Alors :

$$(f \leq g) \Rightarrow \left( \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g \right).$$

*Démonstration.* Appliquer la proposition *supra* à  $g - f$ . □

✌ **Remarque XX.9.** Cette proposition est apparente graphiquement : l'aire d'une fonction dont la courbe est située en permanence sous celle d'une autre risque de ne pas pouvoir excéder celle de son estimée collègue.

**Proposition XX.11.** Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$ . Alors :

(i)  $x \mapsto |f(x)| \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$  ;

(ii)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

*Démonstration.* Identique à celle de l'inégalité triangulaire pour l'intégrale des fonctions en escalier. Pour le point (i), il suffit de remarquer que toute subdivision adaptée à  $f$  l'est aussi à  $x \mapsto |f(x)|$ . □

◇ **Relation de Chasles**

**Proposition XX.12** (Chasles). Soit  $c \in [a, b]$  et soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors :

(i)  $(f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, c]) \cap \mathcal{C}_{\text{pm}}([c, b]))$  ;

(ii) dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt .$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une abomination calculatoire que nous ferions mieux de laisser en paix.  $\square$

✂ **Remarque XX.10.** Il est possible, de la même façon et avec les **mêmes limites** que pour les fonctions en escalier, de généraliser l'intégrale au cas où  $a > b$ .

◇ **Nullité**

**Proposition XX.13** (Nullité de l'intégrale). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **continue, positive** et telle que  $\int_a^b f(t) dt = 0$ . Alors  $f$  est la fonction nulle.

✘ **ATTENTION** : ce théorème est bien entendu **faux** si on l'ampute d'une (ou plusieurs hypothèses) : l'indicatrice de  $\mathbb{Z}$  sur  $[0, 1]$  donne un contre-exemple discontinu, tandis que l'identité est d'intégrale nulle sur  $[-1, 1]$  mais non nulle (elle n'est pas positive sur ce segment).

*Démonstration.* Admettons provisoirement que la fonction que la fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$ . Alors, par hypothèse  $F$  est croissante (car  $f$  est positive) et  $F(a) = F(b)$ . Ainsi,  $F$  est constante, et donc  $f = F'$  est nulle, d'où le résultat.  $\square$

✂ **Exercice XX.4.** Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$  tel que

$$\int_0^1 P^2(t) dt = 0 .$$

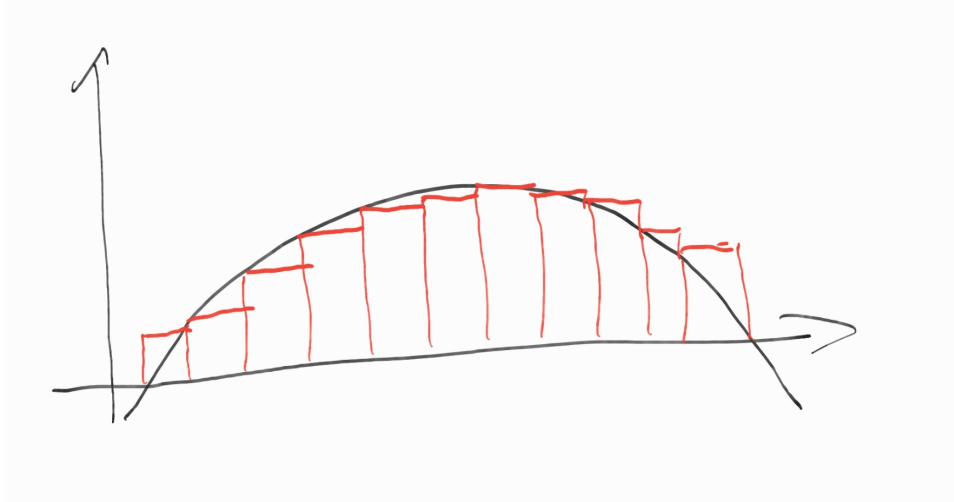
Montrer que  $P = 0$ .

d) **Sommes de Riemann**

**Proposition XX.14.** Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$ . Alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt .$$

✂ **Remarque XX.11.** Ce résultat est en fait une version séquentielle de la méthode des rectangles, appliquée aux subdivisions régulières  $\sigma_{\mathcal{R}}^n(a, b)$ .



Plus  $n$  sera "grand", plus nos rectangles seront "fins" et donc mieux l'intégrale sera approchée par la somme apparaissant dans la proposition, appelée **somme de Riemann**, du nom du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826—1866), que l'on ne présente plus.

*Démonstration.* Nous nous limitons ici au cas où  $f$  est lipschitzienne de rapport  $M > 0$ . Soit  $n \geq 1$  et posons, pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$   $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ; alors :

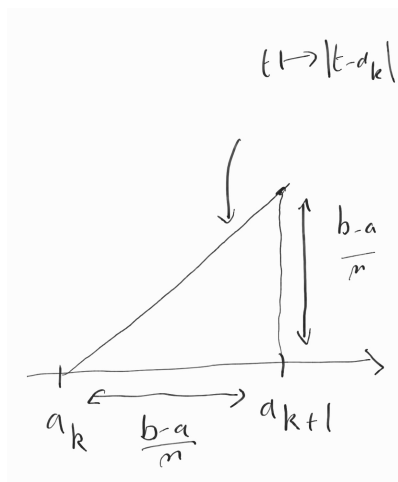
$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \right| \\
 &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} f(a_k) \right| \\
 &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \right| \\
 &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt \right| \\
 &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) - f(a_k) dt \right| \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) - f(a_k) dt \right| \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt .
 \end{aligned}$$

Or, comme  $f$  est  $M$ -lipschitzienne, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in [a_k, a_{k+1}] |f(t) - f(a_k)| \leq M|t - a_k|$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} M|t - a_k| dt \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |t - a_k| dt . \end{aligned}$$



Or, l'intégrale de  $t \mapsto |t - a_k|$  entre  $a_k$  et  $a_{k+1}$  correspond à l'aire du triangle rectangle de sommets  $(a_k, 0)$ ,  $(a_{k+1}, 0)$  et  $(a_{k+1}, a_{k+1} - a_k)$ . Un calcul d'aire nous livre alors que :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |t - a_k| dt = \frac{1}{2} \left( \frac{b-a}{n} \right)^2$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |t - a_k| dt &= M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left( \frac{b-a}{n} \right)^2 \\ &= \frac{M}{2n} (b-a)^2 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

### Exemple XX.9.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos(t) dt ;$$

— si  $n \geq 1$  alors :

$$\begin{aligned} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} . \end{aligned}$$

### 3. Primitives

On fixe dans ce paragraphe un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

On rappelle que si  $f$  est une fonction définie sur  $I$ , on appelle **primitive** de  $f$  toute fonction  $F$  **dérivable sur  $I$**  telle que  $F' = f$ . Nous reprenons (et démontrons) dans ce paragraphe plusieurs résultats évoqués au chapitre **XIII**.

#### a) Existence

**Proposition XX.15.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  et soit  $a \in I$ . Alors la fonction

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de  $f$  telle que  $F(a) = 0$ .

☞ **Remarque XX.12.** La fonction  $F$  est alors automatiquement de classe  $\mathcal{C}^1$ .

*Démonstration.* La fonction  $F$  est bien définie car  $f$  est continue donc continue par morceaux. De plus si  $x, y \in I$  sont tels que  $x \neq y$  alors :

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(y)}{x - y} &= \frac{1}{x - y} \left( \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - y} \left( \int_a^x f(t) dt + \int_y^a f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - y} \int_y^x f(t) dt. \end{aligned}$$

Nous savons en outre que  $f$  est continue en  $y$ ; ceci entraîne que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in I (|t - y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(t) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

De fait, si nous supposons  $|x - y| \leq \delta$ , on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(y)}{x - y} - f(y) \right| &= \left| \frac{1}{x - y} \int_y^x f(t) dt - f(y) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - y} \int_y^x f(t) dt - \frac{1}{x - y} \int_y^x f(y) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - y} \int_y^x f(t) - f(y) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - y|} \underbrace{\int_{[x, y]} |f(t) - f(y)| dt} \end{aligned}$$

où  $\underbrace{[x, y]}$  désigne  $[y, x]$  si  $y < x$  et  $[x, y]$  sinon. De fait, pour tout  $t \in \underbrace{[x, y]}$ , on a  $|t - y| \leq \delta$  ergo :

$$\left| \frac{F(x) - F(y)}{x - y} - f(y) \right| \leq \frac{1}{|x - y|} \varepsilon |x - y| = \varepsilon$$

et donc

$$\frac{F(x) - F(y)}{x - y} \xrightarrow{x \rightarrow y} f(y)$$

d'où la dérivabilité de  $F$  sur  $I$  et le fait que  $F' = f$ .

Pour conclure, remarquons que si  $G$  est une primitive de  $f$  telle que  $G(a) = 0$  alors  $F - G$  est constante car de dérivée nulle sur un intervalle et donc nulle car  $(F - G)(a) = 0$ .  $\square$

**Théorème XX.16** (Théorème fondamental du calcul intégral).

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$  et soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

*Démonstration.* La fonction  $G : x \mapsto F(x) - F(a)$  est une primitive de  $f$  telle que  $G(a) = 0$  donc, d'après la proposition **XX.15** on, pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$$

d'où le résultat.  $\square$

✂ **Remarque XX.13.** Ce théorème a plusieurs conséquences fondamentales :

— les primitives de  $f$  sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt + C$$

pour  $C$  parcourant  $\mathbb{R}$  ;

— l'intégrale est une fonction continue de ses bornes, *i.e* pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  on a :

$$\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \int_a^\alpha f(t) dt ;$$

— si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , on a :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

## b) Retour sur quelques méthodes de calcul intégral

Nous revenons brièvement dans ce paragraphe sur des résultats déjà démontrés au chapitre **XIII**, afin d'offrir à notre estimé lecteur le plaisir de s'immoler les rétines une fois de plus. Les remerciements sont superflus, je vous assure.

**Proposition XX.17** (Intégration par parties). Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Alors, pour tous  $a, b \in I$  :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt,$$

avec

$$[f(t)g(t)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

▮ **Exemple XX.10.** Soit  $x \in [-1, 1]$ ; pour déterminer  $\int_0^x \arcsin(t) dt$  on applique l'IPP à  $f : t \mapsto t$  et  $g = \arcsin$ , toutes deux de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, x]$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^x \arcsin(t) dt &= [t \arcsin(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= x \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + 1 \end{aligned}$$

car  $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$  est une primitive de  $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ .

**Théorème XX.18** (Changement de variable).

Soit  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$  et soit  $f \in \mathcal{C}^0(\varphi(I))$ . Alors, pour tous  $a, b \in I$  on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt.$$

**Corollaire XX.18.a.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([-a, a])$ . Alors :

(i) si  $f$  est impaire, on a :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

(ii) si  $f$  est paire, on a :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

*Démonstration.* On a, par changement de variable  $u = -t$  :

$$\int_0^a f(t) dt = - \int_0^{-a} f(-u) du = - \int_{-a}^0 f(u) du$$

et donc

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + \int_{-a}^0 f(t) dt = 0.$$

Dans le cas où  $f$  est paire, un raisonnement similaire livre :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

□

**Corollaire XX.18.b.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  une fonction  $T$ -périodique (avec  $T > 0$ ). Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

*Démonstration.* Il convient dans un premier temps de remarquer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_0^a f(t) dt = \int_T^{a+T} f(u) du$$

par changement de variable  $u = t + T$ . De fait, on a par la formule de "Chasles" :

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) dt &= \int_0^a f(t) dt + \int_a^{a+T} f(t) dt + \int_{a+T}^T f(t) dt \\ &= - \int_{a+T}^T f(t) dt + \int_a^{a+T} f(t) dt + \int_{a+T}^T f(t) dt \\ &= \int_a^{a+T} f(t) dt. \end{aligned}$$

□

## 4. Formules de Taylor

On fixe dans ce paragraphe un intervalle  $I$  d'intérieur non vide.

Nous avons rencontré par le passé deux formules de Taylor : celle concernant les polynômes (proposition XIV.17) et la formule de Taylor-Young (théorème XVII.9). Ces deux formules avaient pour point commun l'expression de la valeur d'une fonction en un point à partir du polynôme de Taylor de  $f$  en un point  $a$  de son ensemble de définition, *i.e*

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

et d'un éventuel reste négligeable (voire nul).

Nous donnons dans ce paragraphe une nouvelle formule de Taylor avec une expression explicite de ce reste, et étudions certaines conséquences d'un tel résultat.

## a) Formule de Taylor avec reste intégral

**Proposition XX.19.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in I$  et  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ . Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt .$$

*Démonstration.* On le fait par récurrence (joie!) sur  $n \geq 0$ .

— Le cas  $n = 0$  est trivial étant donné que l'on a :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$$

d'après le théorème **XX.16**.

— Si on suppose la propriété vraie au rang  $n$  et que  $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a, b])$  alors on a, comme  $f$  est automatiquement de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur ce même intervalle :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt .$$

par hypothèse de récurrence. Les fonctions  $f^{(n+1)}$  et  $u : t \mapsto -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$  sont de classes  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  avec

$$\forall t \in I, u'(t) = \frac{(n+1)(b-t)^n}{(n+1)!} = \frac{(b-t)^n}{n!}$$

et donc, par intégration par parties (proposition **XX.17**) :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[ -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt . \end{aligned}$$

En réinjectant, on obtient

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

▮► **Exemple XX.11.** Si  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \end{aligned}$$

l'intégrale pouvant se calculer par IPP (cf. chapitre **XIII**).

## b) Inégalité de Taylor–Lagrange

**Proposition XX.20.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in I$  et  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ . Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n$$

avec

$$|R_n| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\underbrace{[a,b]}} |f^{(n+1)}|$$


où  $\underbrace{[a,b]}$  désigne le segment  $[a,b]$  si  $a \leq b$  et  $[b,a]$  sinon.

*Démonstration.* D'après la formule de Taylor avec reste intégral (proposition XX.19), on a :

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} \right| \sup_{\underbrace{[a,b]}} |f^{(n+1)}| dt \\ &= \sup_{\underbrace{[a,b]}} |f^{(n+1)}| \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} \right| dt \\ &= \sup_{\underbrace{[a,b]}} |f^{(n+1)}| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

d'où le résultat, la borne supérieure étant un maximum car  $f^{(n+1)}$  est continue sur le segment concerné.  $\square$

 **Remarque XX.14.**

 **Exemple XX.12.** En reprenant l'exemple précédent, nous avons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\underbrace{[0,x]}} \exp$$

et donc on a, comme  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x.$$

## 5. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Si  $a, b \in \mathbb{R}$  sont tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction, on dira que  $f$  est continue par morceaux si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. De cette façon, on peut poser :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt .$$

Toutes les propriétés vues dans ce chapitre se généralisent aux intégrales de fonctions continue par morceaux à valeurs complexes **sauf la croissance**. L'inégalité triangulaire reste vérifiée, quitte à remplacer la valeur absolue par le module.