Chapitre XIX

Dimension finie

On fixe dans tout ce chapitre un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.– Notion de dimension

a) Espaces de dimension finie

On fixe dans cette partie un $\mathbb{K}$–e.v E.

Définition XIX.1. Un $\mathbb{K}$–e.v est dit **de dimension finie** si il admet une famille génératrice finie.

➠ **Exemple XIX.1.** Les espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie pour $n \geq 1$. L'espace $\mathbb{K}[X]$ ne l'est par contre pas car l'existence d'une famille génératrice finie entraînerait une borne sur le degré des polynômes.

Proposition XIX.1. Soit $n \geq 1$. Si E admet une famille génératrice de cardinal n, alors toutes les familles libres de E sont finies de cardinal inférieur ou égal à n.

Pour démontrer cette proposition, nous allons (une fois n'est pas coutume) avoir recours à un lemme.

Lemme XIX.1. Soit $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathscr{F}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ deux familles de vecteurs de E vérifiant que :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad e'_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})\,.$$

Alors $\mathscr{F}'$ est liée.

Démonstration. On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante : pour tout $n \geq 1$, pour toutes familles $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathscr{F}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de vecteurs de E telles que $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $e'_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, la famille $\mathscr{F}'$ est liée.

- $n = 1$: trivial.
- Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$ et soit $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ et $\mathscr{F}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n+2}$ deux familles de vecteurs de E telles que $\forall i \in [\![1, n+2]\!]$, $e'_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

Ceci signifie qu'il existe une famille de scalaires $a_{i,j}$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n+2]\!], \quad e'_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} e_j \ .$$

Si tous les $a_{i,n+1}$ sont nuls, alors les vecteurs de $\mathscr{F}'$ sont dans l'espace engendré par $(e_1, \ldots, e_n)$ et on peut conclure par hypothèse de récurrence. Dans le cas contraire, on peut supposer (quitte à réordonner les e_j) que $a_{n+2,n+1}$ est non nul.
Posons, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$:

$$e''_i = e'_i - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} e'_{n+2}$$

et remarquons que :

$$\begin{aligned} e''_i &= \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} e_j - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} a_{n+2,j} e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j + a_{i,n+1} e_{n+1} - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} \sum_{j=1}^{n} a_{n+2,j} e_j - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} a_{n+2,n+1} e_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(a_{i,j} - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} \right) e_j \\ &\in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \ . \end{aligned}$$

On peut ensuite conclure par hypothèse de récurrence que les e''_i sont liés, et en déduire que $\mathscr{F}'$ l'est également.

□

Nous sommes grâce à ce lemme en mesure de démontrer la proposition *supra*.

Démonstration. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E de cardinal n et soit $\mathscr{F}$ une famille libre de cet espace. Si $\mathscr{F}$ admettait plus de n éléments, alors elle devrait être liée (en application du lemme) car $\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = E$. □

Corollaire XIX.1.a. Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie sont finies de même cardinal.

Démonstration. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Comme ces deux familles sont libres, elles sont finies et comme $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}'$ génératrice alors $\mathrm{card}(\mathscr{B}) \leq \mathrm{card}(\mathscr{B}')$. On conclut en échangeant les rôles de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. □

☞ Nous savons donc que si il y a existence de bases de E, elles sont de même cardinal. Mais existent–elles ?

b) Théorème de la base incomplète

Théorème XIX.2 (Base incomplète)**.**
On suppose que E est de **dimension finie**. Soit $\mathscr{F}$ une famille libre de E. Alors il existe une base de E contenant $\mathscr{F}$.

Démonstration. Fixons $\mathscr{G} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice finie de E et posons $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. On définit ensuite par récurrence une famille $\mathscr{F}_k$, pour $k \in [\![1, n[\![$ par :

— si $e_k \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F}_{k-1})$ alors on pose $\mathscr{F}_k = \mathscr{F}_{k-1}$;

— sinon, on pose $\mathscr{F}_k = \mathscr{F}_{k-1} \cup \{e_k\}$.

Les familles $\mathscr{F}_k$ sont toutes libres par construction et on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_k) \supset \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_k) .$$

De fait, la famille $\mathscr{F}_n$ est libre et génératrice : c'est une base de E. □

✌ **Remarque XIX.1.** Ce résultat se généralise en dimension infinie, mais ceci est bien au delà de notre niveau technique à ce stade.

Corollaire XIX.2.a. Tout $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie admet une base.

Démonstration. Appliquer le théorème XIX.2 à la famille vide. □

De façon analogue, on peut démontrer un théorème "miroir" au théorème de la base incomplète, permettant d'amaigrir une famille génératrice.

Théorème XIX.3 (Base extraite)**.**
On suppose que E est de **dimension finie**. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Alors il existe une base de E contenue dans $\mathscr{G}$.

c) Bilan

Nous venons démontrer que tout espace de dimension finie admettait des bases, et que ces dernières étaient toutes de même cardinal. Ceci nous permet de poser sereinement la définition *infra*.

Définition XIX.2. Supposons E de dimension finie. On appelle **dimension** de E le cardinal commun à toutes ses bases.

Notation. On notera la dimension de E $\dim(E)$ (ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ lorsqu'il sera nécessaire de préciser le corps de base).

➠ **Exemple XIX.2.** Les dimensions qui suivent découlent trivialement des exemples de bases vues dans le chapitre XVIII :

— $\dim(\{0\}) = 0$ (et il s'agit du seul espace vectoriel de dimension nulle) ;

— si $e \in E \setminus \{0\}$, $\dim(\mathscr{D}_e) = 1$;
— si $u, v \in E$ sont non colinéaires, $\dim(\mathscr{P}_{u,v}) = 2$;
— plus généralement, si $\mathscr{F}$ est une famille finie de E alors :

$$\dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})) \leq \mathrm{card}(\mathscr{F}),$$

avec égalité si et seulement $\mathscr{F}$ est libre.
— $\dim(\mathbb{K}^n) = n$;
— $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$;

✖ **Attention :** $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ mais $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

✍ **Exercice XIX.1.** Soit E un $\mathbb{C}$–e.v. de dimension finie. Démontrer que E est $\mathbb{R}$–e.v. de dimension finie et que :

$$\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2\dim_{\mathbb{C}}(E).$$

Tous les $\mathbb{R}$–e.v. sont–ils des $\mathbb{C}$–e.v. ?

➠ **Exemple XIX.3.** L'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire **homogène** d'ordre 1 (resp. 2) est de dimension 1 (resp. 2). Méditer quant à la possibilité d'en donner une base (indice : ce n'est pas très difficile)...Nous verrons par ailleurs dans le chapitre XXI un résultat plus précis concernant les systèmes linéaires.

✍ **Exercice XIX.2.** Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Déterminer une base et la dimension de l'espace $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

✌ **Remarque XIX.2.** Si E est un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie de dimension n, on a donc naturellement que :
— les familles libres de E sont de cardinal inférieur ou égal à n ;
— tout famille de cardinal **strictement** supérieur à n est liée ;
— les familles génératrices de E sont de cardinal supérieur ou égal à n ou infinies.

On déduit de cette remarque et de la proposition XVIII.15 sur les familles libres maximales et génératrices minimales le résultat suivant, qui sauve bien des vies en pratique.

Proposition XIX.4. On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour toute famille $\mathscr{B}$ finie de vecteurs de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathscr{B}$ est une base ;
(ii) $\mathscr{B}$ est libre de cardinal n ;
(iii) $\mathscr{B}$ est génératrice de cardinal n.

➠ **Exemple XIX.4.** La famille $((1,0,1),(1,0,0),(0,1,0))$ est une base de $\mathbb{K}^3$ car libre et de cardinal 3.

✌ **Remarque XIX.3.** Nous avons vu dans le chapitre XVIII que toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre dans $\mathbb{K}[X]$. On en déduit que toute famille de $n+1$ polynômes non nuls de degrés échelonnés est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2.⁻ Zoologie dimensionnelle

On fixe dans cette partie un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie E de dimension $n \in \mathbb{N}$.

a) Dimension d'un s–e.v

Proposition XIX.5. Soit F un s–e.v de E. Alors :

(i) F est de dimension finie ;

(ii) $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Il y a de plus égalité entre E et F si et seulement si leurs dimensions sont égales.

Démonstration. La démonstration est triviale dans le cas où $F = \{0\}$. Supposons donc $F \neq \{0\}$, ce qui entraîne *de facto* que $n \geq 1$. Soit x un élément non nul de F ; $\{x\}$ est une partie libre de F, donc F contient des parties libres. Toute partie libre d'éléments de F étant une partie libre d'éléments de E toutes les parties libres de F ont au plus n éléments. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des entiers k tels qu'il existe une partie libre de F ayant k éléments. Cet ensemble est non vide ($1 \in \mathscr{E}$) et est un sous-ensemble borné de $\mathbb{N}$ donc il admet un maximum. Soit p ce maximum et soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une partie libre de F ayant p éléments ; cette partie libre est donc une partie libre maximale de F et donc une base, d'où le résultat.

De plus, $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si F possède une base $\mathscr{B}$ de cardinal n. Or, dans ce cas, $\mathscr{B}$ est libre dans E et de cardinal n : il s'agit donc d'une base de E *ergo* $E = \text{Vect}(\mathscr{B}) = F$. $\square$

Exemple XIX.5. On retrouve le résultat "vu" au lycée concernant les dimensions possibles des sous–espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ $(0, 1, 2)$ et $\mathbb{R}^3$ $(0, 1, 2, 3)$.

Remarque XIX.4. Ceci nous permet de dire que deux sous–espaces F et G de E sont supplémentaires **si et seulement si** :

(i) $F \cap G = \{0\}$;

(ii) $\dim(F + G) = \dim(E)$.

Définition XIX.3. Si F est un s–e.v de E de dimension p, on appelle **base adaptée** à F toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de F.

Exemple XIX.6. $((1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathscr{D}_{(1,0,1)}$.

Vocabulaire.

— Tout sous–espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite** ;

— tout sous–espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan**.

Remarque XIX.5. Les deux premiers points de vocabulaire *supra* correspondent aux définitions données pour ces objets dans le chapitre XVIII : un s–e.v de dimension p de E est en effet un espace vectoriel engendré par une famille **libre** à p éléments de E.

b) Supplémentaires, produits

Proposition XIX.6. Soit F un s–e.v de E de dimension p. Alors :
(i) F admet un supplémentaire ;
(ii) tous les supplémentaires de F sont de dimension $n-p$.

Démonstration.

(i) Soit $\mathscr{F}$ une base de F ; alors par théorème de la base incomplète (XIX.2), il existe une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de E adaptée à F. Posons alors $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$: on a alors par définition $\dim(G) = n - p$ (la famille engendrant G est libre dans E) et $E = F \oplus G$ (car $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F.

(ii) Si H est un supplémentaire de F de base $\mathscr{H}$, alors $Fr \cup \mathscr{H}$ est de cardinal n par somme directe (il s'agit d'une base de E adaptée à F et H). Il est découle que $\dim(H) = \mathrm{card}(\mathscr{H}) = n - p$.

□

Exemple XIX.7. Dans $\mathbb{R}^3$, les supplémentaires de droites sont des plans. Dans $\mathbb{R}^2$, il s'agit de droites.

Corollaire XIX.6.a. Les hyperplans d'un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sont exactement ses s–e.v de dimension $n-1$.

Démonstration. Ceci découle du fait qu'un hyperplan est supplémentaire à une droite. □

Corollaire XIX.6.b. Soient F, G deux s–e.v de E en somme directe. Alors :

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)\,.$$

Démonstration. G est un supplémentaire de F dans $F \oplus G$. □

Remarque XIX.6. Pour démontrer que deux s–e.v F et G de E sont supplémentaires, il suffit donc de vérifier que :

(i) $F \cap G = \{0\}$;

(ii) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Proposition XIX.7. Soient E et F deux $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie ; alors $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que si $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ sont des bases respectives de E et F alors $((e_1, 0), \dots, (e_p, 0), (0, e'_1), \dots, (0, e'_n))$ est une base de $E \times F$. □

✌ **Remarque XIX.7.** Ce résultat se généralise trivialement à un produit cartésien de n $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie pour $n \geq 3$.

c) Applications linéaires

Proposition XIX.8. Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On se donne E' un s–e.v de E **de dimension finie**. Alors :

(i) $f(E')$ est de dimension finie ;

(ii) $\dim(f(E')) \leq \dim(E')$ avec égalité lorsque f est injective.

Démonstration. Fixons une base $\mathscr{B}$ de E'. $f(E') = \mathrm{Vect}(f(\mathscr{B}))$, ce qui entraîne que $\dim(f(E'))$ est finie ; de plus $\dim(f(E')) = \mathrm{card}(f(\mathscr{B})) \leq \mathrm{card}\mathscr{B} = \dim(E')$ avec égalité lorsque f est injective (*cf.* chapitre XVI). □

➠ **Exemple XIX.8.**

— L'image d'une droite par $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ est une droite ou un point ;

— il n'existe aucune surjection linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^4$ (s'intéresser à la dimension de l'image pour obtenir une contradiction).

✌ **Remarque XIX.8.** D'une façon générale, cette proposition entraîne que le passage "par" une application linéaire ne peut que **diminuer** la dimension d'un s–e.v, jamais l'augmenter.

Proposition XIX.9. Deux $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie sont isomorphes **si et seulement si** leurs dimensions sont égales.

Démonstration. Soient E et F deux $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie et soit $f \in GL(E, F)$; alors, $\dim(E) = \dim(f(E))$ car f est injective. Or, f est surjective donc $f(E) = F$, d'où le résultat.

Réciproquement, si E et F sont deux $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie de même dimension et de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ alors l'unique application linéaire envoyant $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}'$ est bijective (car elle envoie une base sur une base), d'où le résultat. □

Corollaire XIX.9.a. Soit un E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie et posons $n = \dim(E)$. Alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Ce résultat n'est pas anodin : il s'agit la d'une classification (à isomorphisme près) des $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie par leur dimension : deux espaces vectoriels de même dimension sont de fait "fortement similaires", et l'espace $\mathbb{K}^n$ pourra être utilisé comme "prototype" de ces derniers.

➠ **Exemple XIX.9.** $\mathbb{K}_n[X]$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{n+1}$. Un isomorphisme explicite peut même être déterminé par la méthode désormais usuelle du "jetons une base sur son homologue et prions" :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\to \mathbb{K}^{n+1} \\ X^k &\mapsto (\delta_{i,k+1})_{1\leq i\leq n} . \end{aligned}$$

Proposition XIX.10. Soient E et F deux $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie. Alors :
(i) $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie ;
(ii) $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Démonstration. Pour reprendre une expression tristement célèbre en politique, "il suffit de" construire une base de $\mathscr{L}(E,F)$. Le procédé est hélas relativement douloureux.

Commençons par fixer $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ des bases respectives de E et F (et donc $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$). Posons, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$\begin{aligned} g_{i,j} : E &\to F \\ e_k &\mapsto \delta_{j,k} e'_i \end{aligned}$$

de façon à ce que $g_{i,j}(e_j) = e'_i$. Faites moi confiance, et il n'y aura pas de blessés. Posons $\mathscr{F} = (g_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et démontrons que cette famille constitue une base de $\mathscr{L}(E,F)$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et soit $x = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j e_j \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) . \end{aligned}$$

Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $f(e_j) \in F$: il existe donc une unique famille $(a_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!]}$ de scalaires telle que :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i$$

et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i \\ &= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j e'_i . \end{aligned}$$

Gardons cela en tête le temps de remarquer que, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} g_{i,j}(x) &= g_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{p} x_k e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} x_k g_{i,j}(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{p} x_k \delta_{j,k} e'_i \\ &= x_j e'_i \end{aligned}$$

ce qui entraîne que :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} g_{i,j}(x)$$

i.e

$$f = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} g_{i,j} \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})\,.$$

On en déduit que $\mathscr{F}$ est génératrice dans $\mathscr{L}(E,F)$.

Donnons nous ensuite une famille $(\lambda_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de scalaires telle que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} g_{i,j} = 0\,.$$

Alors, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} g_{i,j}(e_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} \delta_{j,k} e'_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,k} e'_i\,. \end{aligned}$$

Or, la famille $\mathscr{B}'$ est libre, ce qui entraîne que les $\lambda_{i,k}$ sont tous nuls. On en déduit que $\mathscr{F}$ est libre et donc une base, ce qui permet de conclure car $\mathrm{card}(\mathscr{F}) = p\times n = \dim(E)\times\dim(F)$. □

✌ **Remarque XIX.9.** Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension $n \in \mathbb{N}$. Alors :
- — $\dim(\mathscr{L}(E) = n^2$;
- — $\dim(E^*) = n$ et donc E et E^* sont isomorphes.

➠ **Exemple XIX.10.** $\dim(\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^n)) = (n+1)n$.

d) Matrices

Proposition XIX.11. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie de dimension nm.

Démonstration. La structure d'espace vectoriel se vérifie dans la douleur. Concernant la dimension, rappelons la définition, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, de la matrice élémentaire :

$$E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} .$$

Ceci signifie que tous les coefficients de la matrice $E_{i,j}$ sont nuls, à l'exception de celui situé ligne i, colonne j, qui est égal à 1 ; *e.g* pour $n = m = 2$ nous avons :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Cette famille est clairement génératrice : en effet, si $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ on a :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}E_{i,j} .$$

De plus, si l'on suppose trouvée une famille $(\lambda_{i,j})_{i,j}$ de scalaires telle que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}E_{i,j} = 0$$

alors cela signifie que la matrice de coefficients $(\lambda_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$ est nulle, *i.e* que tous les $\lambda_{i,j}$ le sont : la famille $\mathscr{F} = (E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$ est donc une base de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *ergo* $\dim(\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})) = \operatorname{card}(\mathscr{F}) = nm$. □

✌ **Remarque XIX.10.** On peut établir un isomorphisme entre $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ en envoyant les $E_{i,j}$ sur les $g_{i,j}$ de la proposition XIX.10.

✍ **Exercice XIX.3.** Démontrer que les ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des espaces vectoriels de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$ et que l'on a :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) .$$

➥ **Correction :** *Considérons l'application*

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto A^\top . \end{aligned}$$

Il s'agit (proposition XII.2) d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant la relation* $\phi^2 = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ *:* ϕ *est donc une symétrie de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. De fait, par la proposition XVIII.22, on a :*

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Ker}(\phi - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) \oplus \operatorname{Ker}(\phi + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) .$$

De plus, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker}(\phi - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) &\Leftrightarrow (\phi - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})})(M) = 0 \\ &\Leftrightarrow M^\top - M = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in S_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

et donc $\operatorname{Ker}(\phi - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) = S_n(\mathbb{K})$. *Symétriquement, on vérifie que* $\operatorname{Ker}(\phi + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) = A_n(\mathbb{K})$. *Concernant la dimension, il suffit de remarquer que $S_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$ pour $i \leq j \in [\![1, n]\!]$ et que cette famille est libre ; de fait* $\dim(S_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dim(A_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) - \dim(S_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Notons que, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a (comme évoqué dans le chapitre XII) :

$$M = \underbrace{\frac{M + M^\top}{2}}_{\in S_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{M - M^\top}{2}}_{\in A_n(\mathbb{K})}.$$

3.– Rang

a) C'est quoi ?

Définition XIX.4. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de $\mathscr{F}$ la dimension (éventuellement infinie) de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.

Notation. $\operatorname{rg}(\mathscr{F})$

Exemple XIX.11. Dans $\mathbb{R}^2$, $\operatorname{rg}((0,1),(0,2)) = 1$. Dans $\mathbb{K}[X]$, $\operatorname{rg}(X, X^3+X) = 2$.

Remarque XIX.11. Si $\mathscr{F}$ est finie, alors $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leq \operatorname{card}(\mathscr{F})$ avec égalité si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre.

Définition XIX.5. Soient E et F deux $\mathbb{K}$–e.v avec E de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **rang** de f la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

Notation. $\operatorname{rg}(f)$

Remarque XIX.12. L'introduction simultanée de ces deux notions peut sembler étonnante et propice à confusion. Rassurons nous toutefois : si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors on a, par définition(s) :

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(\mathscr{B})).$$

Je suis convaincu que le lecteur est désormais soulagé.

Exemple XIX.12.
— $\operatorname{rg}(\mathrm{id}_E) = \dim(E)$;

— plus généralement, toute bijection est de rang égal à la dimension de son espace de départ/arrivée ;
— si p est le projecteur sur F parallèlement à G (ces espaces étant de dimension finie), alors $\mathrm{rg}(p) = \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(F)$.

✌ **Remarque XIX.13.** f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$. En effet, $\mathrm{rg}(f) = \dim(f(E)) \ldots$

Proposition XIX.12. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$–e.v tels que E et F soient de dimension finies. Alors, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ on a :
(i) $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$;
(ii) si u (resp. v) est un isomorphisme, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$ (resp. $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$).

Démonstration.
(i) Comme $\mathrm{Im}(v \circ u) = v(u(E))$ et que $u(E) \subset F$, on a $\dim(v(u(E)) \leq \dim v(F) = \mathrm{rg}(v)$. De plus, par image, $\dim v(u(E)) \leq \dim u(E) = \mathrm{rg}(u)$, d'où le résultat.
(ii) Si u est bijective, alors $u(E) = F$ et donc $\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim v(F) = \mathrm{rg}(v)$. On procède symétriquement dans le cas où v est bijective.

□

⋄ Calcul pratique du rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension $p \in \mathbb{N}$ et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. On fixe une famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E s'écrivant, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$u_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e_i$$

dans la base $\mathscr{B}$.

Afin d'aider au calcul du rang de $\mathscr{F}$, nous énonçons les faits suivants, qui seront démontrés au chapitre XXI : on ne modifie pas le rang de $\mathscr{F}$ si on. . .
(A) . . .on échange la position de deux vecteurs dans la famille $(u_i \leftrightarrow u_j)$;
(B) . . .on multiplie un vecteur par un scalaire **non nul** $(u_i \leftarrow \lambda u_j)$;
(C) . . .on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des **autres** $\left(u_i \leftarrow u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j\right)$.

➠ **Exemple XIX.13.** Pour déterminer le rang de la famille $((1, 2, 5), (2, 1, 4), (1, -1, -1))$ dans $\mathbb{K}^3$, on effectue les opérations élémentaires suivantes : partant de

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{array}$$

on soustrait à la deuxième colonne deux fois la première $(C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1)$ et à la troisième la première $(C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$, obtenant

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 5 & -6 & -6 \end{array}$$

puis on effectue $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{array}$$

ce qui permet de conclure que le rang de notre famille est égal à celui de $((1,2,5),(0,-3,-6),(0,0,0))$, à savoir 2.

b) Théorème du rang

Proposition XIX.13 (Théorème "géométrique" du rang)**.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$–e.v et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors, pour tout supplémentaire G de $\mathrm{Ker}(f)$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to \mathrm{Im}(f) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

✌ **Remarque XIX.14.** Noter que ce résultat est valable en dimension infinie (il faut toutefois obtenir l'existence d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$, ce qui nécessite l'axiome du choix).

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'application φ est bien définie et linéaire par construction. De plus :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\varphi) &= \{x \in G \mid f(x) = 0\} \\ &= G \cap \mathrm{Ker}(f) \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

donc φ est injective. Enfin, notons que si $y \in \mathrm{Im}(f)$ alors $\exists x \in E$, $f(x) = y$ et, comme $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus G$ il existe un unique couple $(u,v) \in \mathrm{Ker}(f) \times G$ tel que : $y = f(u+v) = f(v)$ et donc φ est surjective. □

Théorème XIX.14 (Théorème du rang)**.**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$–e.v tels que E soit de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)\,.$$

Démonstration. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ (il existe sans râler par dimension finie de E) ; alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(G)$. Or, la proposition XIX.13 entraîne que $\dim(G) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$, d'où le résultat. □

✖ **Attention :** ce théorème, fort utile au demeurant, ne signifie pas que si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires. Prendre par exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ (x,y) &\mapsto (y,0) \end{aligned}$$

qui vérifie $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{K}\}$.

Proposition XIX.15. Soient E et F deux $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie **de même dimension** et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective ;

(ii) f est surjective ;

(iii) f est bijective.

Démonstration.

(i)⇒(ii) Si f est injective alors $\dim(E) = \text{rg}(f)$ par théorème du rang (XIX.14) et comme $\dim(E) = \dim(F)$ on a bien f surjective.

(ii)⇒(iii) On a dans ce cas $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f) = \dim(F) - \text{rg}(f) = 0$, d'où f est injective donc bijective.

(iii)⇒(i) Trivial.

□

✌ **Remarque XIX.15.** Cela signifie qu'un endomorphisme est bijectif si et seulement si il est inversible à gauche ou à droite.

➠ **Exemple XIX.14.** Ce résultat facilite **considérablement** notre travail lorsque nous souhaitons démontrer le caractère bijectif d'une application linéaire pour peu que les étoiles (et les dimensions) soient alignées.

— l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^3 &\longrightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ (a, b, c) &\mapsto aX^2 + bX + c \end{aligned}$$

est bijective : son noyau est aisé à déterminer et $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$.

— De même, on montre aisément que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \,. \end{aligned}$$

est bijective pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Le lecteur avisé subira une impression massive de déjà vu.

La formule qui suit est attribuée à Hermann Günther Grassmann, mathématicien et indianiste (spécialiste des langues et civilisations du sous–continent indien) allemand (1809—1877).

Proposition XIX.16. Soient F et G deux s–e.v d'un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie E. Alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \,.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'application

$$\begin{aligned} f : F \times G &\to F + G \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

est surjective, de noyau

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, -x) \,|\, x \in F \cap G\}$$

isomorphe à $F \cap G$ et d'appliquer le théorème du rang (XIX.14) en se rappelant que $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$. □

Exemple XIX.15. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plan de $\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\dim(\mathscr{P} \cap \mathscr{P}') = \dim(\mathscr{P}) + \dim(\mathscr{P}') - \dim(\mathscr{P} + \mathscr{P}') = 4 - \dim(\mathscr{P} + \mathscr{P}') .$$

Or $\dim(\mathscr{P} + \mathscr{P}') = 3$ si les deux plans ne sont pas confondus et 2 sinon. Ceci entraîne que l'intersection de deux plans non confondus de $\mathbb{R}^3$ est une droite.

Exemple XIX.16. Deux droites sont en somme directe si et seulement si elles engendrent un plan. De même, un plan et une droite le sont à condition d'engendrer un espace de dimension 3.

4.– Formes linéaires et hyperplans

Rappelons avant de débuter ce paragraphe que si E est un $\mathbb{K}$–e.v, son **dual** E^* est l'ensemble

$$E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$$

des **formes linéaires** sur E. Nous avons également vu que si E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(E^*)$, ce qui entraîne que E et E^* sont isomorphes.

On fixe dans ce paragraphe un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie E de dimension $n \in \mathbb{N}$.

a) Formes linéaires coordonnées

Définition XIX.6. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E. On appelle **formes coordonnées** relativement à la base $\mathscr{B}$ les formes linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} e_i^* : E &\to \mathbb{K} \\ e_j &\mapsto \delta_{i,j} \end{aligned}$$

pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Remarque XIX.16.

— Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a, pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$e_j^*(x) = \sum_{i=1} x_i \underbrace{e_j^*(e_i)}_{=\delta_{i,j}} = x_j .$$

Ces formes linéaires peuvent également être définies, *stricto sensu*, en dimension infinie (lorsque l'on dispose d'une base de E).

— On peut démontrer que la famille des formes linéaires coordonnées à une base donnée forme une base de E^*. Il suffit de montrer que cette famille est libre, étant donné l'égalité $\dim(E) = \dim(E^*)$. Si l'on suppose trouvée une famille $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0$ alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j$$

d'où le résultat.

— Le résultat précédent peut également être vu comme un corollaire de la proposition XIX.10 (fixer (1) comme base de $\mathbb{K}$).

Exemple XIX.17.

— Considérons la base $((1,1)(0,1))$ de $\mathbb{K}^2$; si $(x,y) \in \mathbb{K}^2$ alors

$$(x,y) = x \cdot (1,1) + (y-x) \cdot (0,1)$$

ce qui entraîne que les formes linéaires coordonnées associées à cette dernière sont $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y - x$.

— Soient $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts : on dispose alors de la famille des polynômes de Lagrange associée à ceux ci, en l'occurrence, pour $i \in [\![0,n]\!]$:

$$L_i = \prod_{j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \in \mathbb{K}_n[X]\,.$$

Par existence du polynôme interpolateur de Lagrange (*cf.* chapitre XIV), la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ et de cardinal égal à la dimension de cet espace : il s'agit donc d'une base. Pour déterminer les formes linéaires coordonnées associées à cette dernière sont, notons que pour tous $i,j \in [\![0,n]\!]$ nous devrions avoir :

$$L_i^*(L_j) = \delta_{i,j}$$

et donc, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors $P = \sum_{j=0}^{n} P(x_j) L_j$ ce qui entraîne que :

$$L_i^*(P) = \sum_{j=0}^{n} P(x_j) L_i^*(L_j) = P(x_i)\,.$$

Les L_i^* sont donc les morphismes d'évaluation en les x_i.

b) Lien aux hyperplans

Si H est un hyperplan de E, alors H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$. Fixons $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E : alors il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de scalaires telle que :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$$

avec de plus, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{e_i^*(e_j)}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_j$$

ce qui permet d'écrire :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^* .$$

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$; alors on a :

$$\begin{aligned} x \in H &\Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)x_i = 0 . \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est appelée **équation cartésienne** de l'hyperplan $\mathscr{H}$.

➠ **Exemple XIX.18.** $x + y - 3z = 0$ est l'équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$, noyau de $(x, y, z) \mapsto x + y - 3z$. Une base en est (par exemple) $(1, 2, 1), (1, -1, 0))$.

De fait, un hyperplan dans E correspond à l'espace des solutions d'une équation **linéaire** à n inconnues. On en déduit que l'ensemble des solutions d'un système linéaire est une intersection d'hyperplans.

Proposition XIX.17. Soient $H_1, \dots, H_m$ des hyperplans de E. Alors :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geq n - m .$$

Réciproquement, si F est un s–e.v de E de dimension $n - m$, alors il existe m hyperplans $\mathscr{H}_1, \dots, \mathscr{H}_m$ de E tels que :

$$F = \bigcap_{k=1}^{m} \mathscr{H}_k .$$

Démonstration. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E^* \setminus \{0\}$ telles que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $H_i = \mathrm{Ker}(\varphi)$. On obtient le premier point en appliquant le théorème du rang à l'application

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{K}^m \\ x &\mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \end{aligned}$$

dont le noyau est égal à l'intersection des H_i et qui est surjective. Pour la réciproque, fixons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F et posons, pour $k \in [\![1, m]\!]$ φ_k comme étant l'unique forme linéaire envoyant e_{n-m+k} sur 0 est les autres e_i sur 1. Il suffit alors de poser $\mathscr{H}_k = \mathrm{Ker}(\varphi_k)$. □

✌ **Remarque XIX.17.** Tout ceci généralise les résultats vus en géométrie dans les classes antérieures sur les équations de droites et plans dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.