Chapitre XVIII

Espaces vectoriels

On fixe dans tout ce chapitre un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.⁻ Structures linéaires

a) C'est quoi ?

Définition XVIII.1. Soit E un ensemble muni d'un loi de composition interne $+ : E \times E \to E$ et d'une loi de composition externe $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$. On dit que le triplet $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$–**espace vectoriel** (abrégé $\mathbb{K}$–e.v) si :

(A) $(E, +)$ est un groupe abélien ;

(B) $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$;

(C) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;

(D) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;

(E) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

Vocabulaire. Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, ceux de $\mathbb{K}$ **scalaires**.

✌ **Remarque XVIII.1.** La donnée des lois de composition pourra être sous entendue, tout comme la notation "$\cdot$" pour la multiplication externe.

➠ **Exemple XVIII.1.**

- $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$–e.v ; la multiplication externe est alors interne ;
- l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ est un $\mathbb{K}$–e.v pour l'addition des fonctions et leur multiplication par une constante ;
- $\{0_{\mathbb{K}}\}$ est un $\mathbb{K}$–e.v, appelé **espace nul** ;
- l'ensemble $\mathbb{K}^2$ muni de l'addition coordonnée par coordonnée et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$–e.v ;
- $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$–e.v pour l'addition des polynômes et la multiplication par une constante. Il en va similairement de $\mathbb{K}(X)$.

Proposition XVIII.1. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Alors :

$$(\lambda \cdot x = 0) \Leftrightarrow (\lambda = 0) \vee (x = 0)\ .$$

✖ **Attention :** il y a deux zéros différents dans la proposition *supra* : le premier est celui de $\mathbb{K}$, le second celui de E.

Démonstration. ($\Leftarrow$) Cela découle du fait que $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0+0)$ et donc $\lambda \cdot 0 = -\lambda \cdot 0$. De même, $(0+0) \cdot x = 0 \cdot x$ ...

($\Rightarrow$) Supposons $\lambda \cdot x = 0$ et $\lambda \neq 0$. Alors, quitte à multiplier des deux côtés par $\dfrac{1}{\lambda}$ on obtient que $1 \cdot x = 0$, *i.e* $x = 0$.

□

Proposition XVIII.2. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit $x \in E$. Alors $(-1) \cdot x = -x$.

✖ **Attention :** "$-x$" représente ici l'inverse de x pour "$+$".

Démonstration. On a $1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$ d'où le résultat. □

b) Exemples fondamentaux

◇ $\mathbb{K}^n$

L'espace $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$–e.v pour l'addition terme à terme et la multiplication par un scalaire, *i.e* si $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose :

$$(x_1, \ldots x_n) + \lambda \cdot (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + \lambda y_1, \ldots, x_n + \lambda y_n) .$$

✖ **Attention :** le corps de base est évidemment fondamental : $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$–e.v et $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ un $\mathbb{C}$–e.v et pourtant leurs structures sont différentes. En particulier, on ne multiplie pas par i dans $\mathbb{R}^2$......

◇ **Fonctions**

Soit X un ensemble et E un $\mathbb{K}$–e.v ; alors l'ensemble $\mathscr{F}(X, E) = E^X$ est un $\mathbb{K}$–e.v pour les opérations suivantes : si $f, g \in E^X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$(f + \lambda g) : x \mapsto f(x) + \lambda g(x) .$$

En particulier, l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$–e.v.

◇ **Produits**

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{K}$–e.v ; alors le produit $E_1 \times E_n$ est un $\mathbb{K}$–e.v pour l'addition terme à terme et la multiplication scalaire. On retrouve la structure vue sur $\mathbb{K}^n$ comme cas particulier.

◇ **Matrices**

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes est $\mathbb{K}$–e.v pour les opérations linéaires décrites dans le chapitre XII, à savoir : :

— la somme de deux matrices $M = (m_{i,j})_{i,j}$ et $N = (n_{i,j})_{i,j}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie comme étant la matrice $M + N = (a_{i,j})_{i,j}$ telle que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad a_{i,j} = m_{i,j} + n_{i,j} \,.$$

Ceci définit une loi de composition interne commutative sur $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$;

— si $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit la matrice $\lambda M = (a_{i,j})_{i,j}$ *via*

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad a_{i,j} = \lambda m_{i,j} \,.$$

c) Combinaisons linéaires

Définition XVIII.2. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v ; on appelle **combinaison linéaire sur** E toute expression de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

avec les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (appelés **coefficients**) et les $x_i \in E$.

Exemple XVIII.2.

— Dans $\mathbb{K}^2$, tout élément est combinaison linéaire de $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

— Dans $\mathbb{K}^3$, posons $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, -1, 0)$ et $e_3 = (3, 1, 1)$. Alors, $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ est combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3 si et seulement si il existe λ, μ et ν tels que :

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = (x, y, z)$$

i.e

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu &= x \\ 2\lambda - \mu + \nu &= y \\ \lambda + \nu &= z \end{cases} .$$

Ce concept de combinaisons linéaires (finies) peut se reformuler pour accepter des familles de vecteurs potentiellement infinies à condition que seul un nombre fini de coefficients soient non nuls. Nous avons vu un procédé similaire lors de l'étude des polynômes au chapitre XIV.

Définition XVIII.3. Une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires sera dite **presque nulle** (ou à support fini) si il existe $J \subset I$ fini tel que :

$$\forall i \in I \setminus J,\ \lambda_i = 0 \,.$$

Dans ce cas, l'ensemble (fini)

$$\operatorname{supp}((\lambda_i)_{i \in I}) = \{ i \in I \mid \lambda_i \neq 0 \}$$

est appelé **support** de la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$.

Dans le cas où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle de scalaires de support J, on pourra noter :

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = \underbrace{\sum_{i\in J}\lambda_i x_i}_{\text{somme finie}}$$

et on parlera de "combinaison linéaire des x_i".

✖ **Attention :** une combinaison linéaire est donc **TOUJOURS** une somme **finie**.

➠ **Exemple XVIII.3.** Tout polynôme est combinaison linéaire de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.⁻ Applications linéaires

a) C'est quoi ?

Définition XVIII.4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$–e.v ; une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :
- $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

✌ **Remarque XVIII.2.**
- Une telle application est donc un morphisme de groupes de $(E,+)$ vers $(F,+)$ ce qui entraîne que $f(0_E) = 0_F$. **Il est donc inutile de démontrer cette propriété lors de l'étude.**
- Pour tout $\mathbb{K}$–e.v E, les applications $x \mapsto \lambda x$ (pour $\lambda \in \mathbb{K}$) sont des applications linéaires de E dans E, appelée **homothéties**. Si $\lambda = 1$ (resp. $\lambda = 0$) on parle d'application identité (resp. d'application nulle).

➠ **Exemple XVIII.4.** Les applications suivantes sont linéaires :
- $$f : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2 \qquad (x,y) \mapsto (x-y, x+y) \quad ;$$
- $$g : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K} \qquad (x,y) \mapsto x - 14y \quad ;$$
- $$h : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \qquad u \mapsto (3u_n - u_0)_n \quad ;$$
- $$\mathrm{d} : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \qquad P \mapsto P' \quad ;$$

— pour $\lambda \in \mathbb{K}$, et E un $\mathbb{K}$–e.v l'homothétie de rapport λ sur E :

$$\begin{aligned} h_\lambda : E &\longrightarrow E \\ x &\mapsto \lambda x \end{aligned} \qquad ;$$

— si $a \in \mathbb{K}$, l'évaluation en a :

$$\begin{aligned} \mathrm{eval}_a : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ P &\mapsto P(a) \end{aligned} \qquad ;$$

— si E est l'ensemble des suites convergentes de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (vérifier qu'il s'agit bien d'un $\mathbb{K}$–e.v .) :

$$\begin{aligned} \lim : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ u &\mapsto \lim u_n \end{aligned} \qquad ;$$

— si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, les espaces $\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$–e.v et, pour tout $a \in I$,

$$\begin{aligned} I : \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}) \\ f &\mapsto \left(x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

est linéaire.

✌ **Remarque XVIII.3.** Une application linéaire conserve les combinaisons linéaires : ceci est **fondamental**. Si f est linéaire, $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs, alors :

$$f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i)\,.$$

Notation.

— L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

— Les applications linéaires de E dans E sont appelées **endomorphismes** ; leur ensemble est noté $\mathscr{L}(E)$.

— Les applications linéaires bijectives de E dans F sont appelées **isomorphismes** ; leur ensemble est noté $GL(E, F)$.

— Les applications linéaires bijectives de E dans E sont appelées **automorphismes** ; leur ensemble est noté $GL(E)$ et appelé **groupe linéaire de** E.

— Les applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$ sont appelées **formes linéaires** ; leur ensemble est noté E^* et appelé **dual de** E.

◇ Endomorphismes du plan

Posons $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1) \in \mathbb{K}^2$. Alors, tout élément $u = (x, y) \in \mathbb{K}^2$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de e_1 et e_2, en l'occurrence :

$$u = xe_1 + ye_2\,.$$

Soit à présent $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$. Alors, pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$f(u) = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2)$$

et donc l'application f est totalement déterminée par la donnée de $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Plus précisément, si on pose $(a,c) = f(e_1)$ et $(b,d) = f(e_2)$ on a :

$$f(u) = (ax + by, cx + dy)\ :.$$

Réciproquement, les applications définies par ce type de formule sont bien des endomorphismes de $\mathbb{K}^2$, *ergo* :

$$\mathscr{L}(\mathbb{K}^2) = \{(x,y) \mapsto (ax + by, cx + dy) \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{K}\}\ .$$

Ceci étant fait, intéressons nous au cas des automorphismes : si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ et que $u, u' \in \mathbb{K}^2$ vérifient $f(u) = f(u')$, on a :

$$f(u - u') = f(u) - f(u') = 0$$

et donc, on en déduit aisément que f est injective si et seulement si :

$$\{u \in \mathbb{K}^2 \,|\, f(u) = 0\} = \{0\}\ .$$

Si f est donnée par le mécanisme $f : (x,y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, alors :

$$\begin{aligned} \forall u = (x,y) \in \mathbb{K}^2,\ f(u) = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by &=& 0 \\ cx + dy &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (ad - bc)x &=& 0 \\ (ad - bc)y &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

via les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow dL_1 - bL_2$ et $L_2 \leftarrow aL_2 - cL_1$. Ce système n'admet de solution non nulle que si $ad - bc \neq 0$, ce qui nous livre une CNS d'injectivité pour les endomorphismes de $\mathbb{K}^2$. On peut adapter ce raisonnement pour démontrer que la même condition nous livre la surjectivité, ce qui entraîne que :

$$GL(\mathbb{K}^2) = \{(x,y) \mapsto (ax + by, cx + dy) \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{K},\ ad - bc \neq 0\}\ .$$

b) Opérations sur les applications linéaires

Proposition XVIII.3. Soient E et F deux $\mathbb{K}$–e.v ; alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$–e.v .

Démonstration. C'est essentiellement immédiat une fois les opérations posées : il s'agit de celles déjà définies sur les ensembles de fonctions. □

✌ **Remarque XVIII.4.** $\mathscr{L}(E,F) \subset F^E$: il s'agit donc d'un $\mathbb{K}$–e.v inclus dans un autre $\mathbb{K}$–e.v ; de là à parler de "sous–$\mathbb{K}$–e.v "...

Proposition XVIII.4. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$–e.v et soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

(i) $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$;

(ii) si $f \in GL(E,F)$, alors sa réciproque est linéaire.

Démonstration. (i) Trivial.

(ii) Soient $X, Y \in F$; alors, comme f est bijective, il existe un unique couple $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = X$ et $f(y) = Y$. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(X + \lambda Y) &= f^{-1}(f(x) + \lambda f(y)) \\ &= f^{-1} \circ f(x + \lambda y) \text{ par linéarité de } f \\ &= x + \lambda y \\ &= f^{-1}(X) + \lambda f^{-1}(Y)\,. \end{aligned}$$

□

✌ **Remarque XVIII.5.** La composition des applications linéaires est **bilinéaire**, *i.e* si f, g, h sont des applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a, sous réserve de la légalité des composées *infra* :

$$f \circ (g + \lambda h) = f \circ g + \lambda(f \circ h) \quad \text{et} \quad (f + \lambda g) \circ h = f \circ h + \lambda(f \circ g)\,.$$

Corollaire XVIII.4.a. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v . Alors $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

✌ **Remarque XVIII.6.** Cet anneau est non commutatif dés que $\dim(E) \geq 2$ (*cf.* chapitre XIX). On peut par exemple remarquer que $f : (x, y) \mapsto (0, y)$ et $g : (x, y) \mapsto (x+y, y)$ ne commutent pas car $g \circ f(0, 1) = (1, 1)$ et $f \circ g(0, 1) = (0, 1)$. Il est est également non intègre (même nonobstant la commutativité) et contient des éléments nilpotents ($(x, y) \mapsto (0, x)$ par exemple).

Corollaire XVIII.4.b. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v . Alors $(GL(E), \circ)$ est un groupe.

✖ **Attention :** $GL(E)$ n'est **PAS** un $\mathbb{K}$–e.v : si $f \in GL(E)$, $f - f \notin GL(E)$ (si $E \neq \{0\}$)...

✌ **Remarque XVIII.7.** Ces résultats justifient le fait que nous noterons souvent, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, u^k la composée $\underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{k \text{ fois}}$, avec la convention que $u^0 = \mathrm{id}_E$. Dans le cas où $u \in GL(E)$, on définira de façon analogue u^k, avec $k < 0$, comme une composée de u^{-1}. On notera aussi parfois, lorsque $u, v \in \mathscr{L}(E)$, uv la composée $u \circ v$.

3.⁻ Sous–espaces vectoriels

a) Quoi ?

Définition XVIII.5. Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$–e.v et soit $F \subset E$. On dit que F est un **sous–espace vectoriel** (s–e.v) de E si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$–e.v .

Exemple XVIII.5.

— $\{0_E\}$ est un s–e.v de E pour tout $\mathbb{K}$–e.v E ;
— de même, tout $\mathbb{K}$–e.v est un s–e.v de lui–même ;
— si E et F sont deux $\mathbb{K}$–e.v , $\mathscr{L}(E,F)$ est un s–e.v de F^E ;
— pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un s–e.v de $\mathbb{K}[X]$;
— l'ensemble des suites convergentes sur $\mathbb{K}$ est un s–e.v de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;
— $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ est un s–e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
— $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ est un s–e.v de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et donc de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Nous disposons, comme pour les sous–groupes/anneaux, d'une caractérisation des s–e.v qui nous sera précieuse en pratique. En l'occurrence, F est un s–e.v de E si et seulement si :

(i) $F \subset E$;

(ii) $0 \in F$;

(iii) $\forall x, y \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $x + \lambda y \in F$.

Vocabulaire. Si F est un s–e.v de E, il est dit *strict* si $\{0\} \subsetneq F \subsetneq E$, et *trivial* sinon.

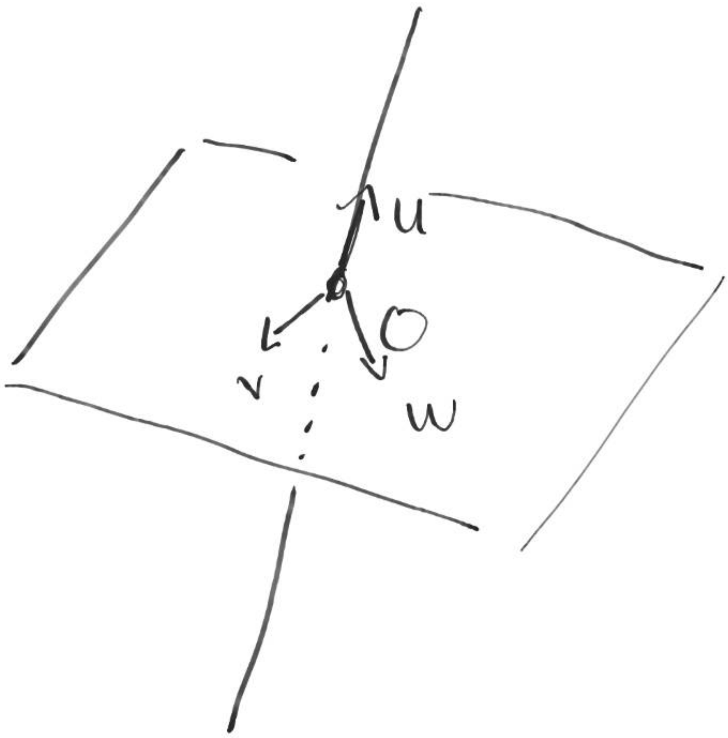
b) Exemples fondamentaux

◇ Objets "géométriques"

On fixe dans cette partie un $\mathbb{K}$–e.v E. On appelle **droite engendrée par un vecteur** $v \in E$ l'ensemble :

$$\mathscr{D}_v = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on retrouve la notion de droite (vectorielle) vue dans les classes antérieures, ce qui est plutôt rassurant.



De la même façon, étant donné deux vecteurs $u, v \in E$ tels que $u \notin \mathscr{D}_v$ (on parle de vecteurs **non colinéaires**), on peut définir le **plan engendré par** u **et** v comme l'ensemble :

$$\mathscr{P}_{u,v} = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} .$$

Il s'agit donc de l'ensemble des combinaisons linéaires de u et v ; ceci coïncide également avec la notion de plan vectoriel dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ avec laquelle nous nous permettons d'espérer que le lecteur soit familier. Dans le cas contraire, nous incluons un "joli" dessin.

✍ **Exercice XVIII.1.** Démontrer ("à la main") que le plan vectoriel d'équation $x + 2y - 3z = 0$ est un s–e.v de $\mathbb{R}^3$.

➠ **Exemple XVIII.6.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x + \theta) = \cos(x)\cos(\theta) - \sin(x)\sin(\theta)$$

et donc $x \mapsto \cos(x + \theta)$ appartient au plan engendré par cos et sin.

Proposition XVIII.5. Droites et plans sont des s–e.v des espaces concernés.

Démonstration. Trivial via la caractérisation. □

◇ Image, image réciproque, noyau

Le paragraphe qui suit devra logiquement apparaître au lecteur attentif comme réminiscent du chapitre VIII. Ceci n'est pas fortuit.

Proposition XVIII.6. Soient E, F deux $\mathbb{K}$–e.v , E' (resp. F') un s–e.v de E (resp. F) et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

(i) $f(E')$ est un s–e.v de F ;

(ii) $f^{-1}(F')$ est un s–e.v de E.

Démonstration.

(i) Il est clair que $f(E') \subset F$; de plus $0 \in E'$ (car E' est un s–e.v de E) ce qui entraîne que $0 = f(0) \in f(E')$. Soient ensuite $X, Y \in f(E')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; alors il existe $x, y \in E'$ tels que $X = f(x)$ et $Y = f(y)$ donc :

$$\begin{aligned} X + \lambda Y &= f(x) + \lambda f(y) \\ &= f(\underbrace{x + \lambda y}_{\in E'}) \in f(E') . \end{aligned}$$

(ii) On sait que $f^{-1}(F') \subset E$; de plus $0 \in F'$ ce qui entraîne que $0 = f^{-1}(0) \in f^{-1}(F')$. Soient ensuite $x, y \in f^{-1}(F')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; alors :

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \in F'$$

et donc $x + \lambda y \in f^{-1}(F')$.

□

Proposition/définition XVIII.6. Soient E, F deux $\mathbb{K}$–e.v et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle :
- **noyau** de f l'ensemble
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} ;$$
- **image** de f l'ensemble
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} .$$

Ces deux ensembles sont de plus des s–e.v de E et F respectivement.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$ et $\mathrm{Im}(f) = f(E)$. □

Exemple XVIII.7.
- Pour tout $a \in \mathbb{K}$, le noyau de l'application $\mathrm{eval}_a \in \mathbb{K}[X]^*$ est l'ensemble des polynômes admettant a comme racine, *i.e* $(X-a)\mathbb{K}[X]$. Son image est $\mathbb{K}$ tout entier car, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $x = \mathrm{eval}_a(x)$.
- Le noyau de l'application $\mathrm{d} \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^1(\mathbb{R}), \mathscr{C}^0(\mathbb{R}))$ définie par $\mathrm{d} : f \mapsto f'$ est l'ensemble des fonctions constantes. Son image est l'ensemble des fonctions continues : en effet, si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, alors
$$f = \mathrm{d}\left(x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) .$$
- L'image de la fonction $x \mapsto (x, 2x)$ définie de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}^2$ est la droite engendrée par $(1,2)$. Son noyau est nul.

Proposition XVIII.7. Soient E, F deux $\mathbb{K}$–e.v et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :
(i) f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$;
(ii) f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. Une application linéaire est un morphisme de groupes, d'où le résultat. □

Exemple XVIII.8. On peut déterminer le noyau de l'application
$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^2 &\to \mathbb{K}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x+y, x-y) \end{aligned}$$
en résolvant le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right. .$$
On trouve $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$: f est injective. Le lecteur intrigué pourra vérifier qu'elle est même surjective.

Proposition XVIII.8. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit $\varphi \in E^*$ **non nulle**. Alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors, si $a \in E \setminus \mathrm{Ker}(\varphi)$:

$$\lambda = \varphi\left(\frac{\lambda a}{\varphi(a)}\right).$$

□

c) Intersection, sous–espace engendré par une partie

On fixe dans cette partie un $\mathbb{K}$–e.v E.

Proposition XVIII.9. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille (quelconque) de s–e.v de E. Alors :

$$\bigcap_{i\in I} F_i \text{ est un s–e.v de } E.$$

Démonstration. Immédiat via la caractérisation ; on rappelle que $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$ si et seulement si $\forall i \in I$, $x \in F_i$. □

Exemple XVIII.9.

— L'intersection de deux droites est un s–e.v ; c'est même le sous–espace nul. Dans $\mathbb{R}^3$, on peut s'intéresser aux intersections de plans, qui sont des droites. Dans $\mathbb{R}^4$, deux plans peuvent ne s'intersecter qu'en 0, et cela peut causer des migraines. ;

— l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p équations et q inconnues est un s–e.v de $\mathbb{K}^q$, intersection des p s–e.v des solutions de chaque équation.

✖ **Attention :** la réunion de deux s–e.v n'est a priori **pas** un s–e.v : regarder $\mathscr{D}_{e_1} \cup \mathscr{D}_{e_2}$ dans $\mathbb{K}^2$ qui contient e_1 et e_2 mais pas $(1,1) = e_1 + e_2$.

Proposition/définition XVIII.7. Soit $A \subset E$. Alors l'intersection de tout les s–e.v de E contenant A est un s–e.v de E, appelé **espace engendré par** A.

Notation. $\mathrm{Vect}(A)$; lorsque le corps de base sera une donnée essentielle, on notera $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(A)$.Si la partie A est décrite comme une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs, on pourra noter $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.

Démonstration. Il s'agit d'une intersection de s–e.v . □

✌ **Remarque XVIII.8.** Le sous–espace engendré par A est donc le plus petit s–e.v de E contenant A. Cela signifie que **tout s–e.v de E contenant A contient** $\mathrm{Vect}(A)$.

Exemple XVIII.10.

— $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$;
— si F est un s–e.v de E, $\mathrm{Vect}(F) = F$;
— si $e \in E \setminus \{0\}$, $\mathrm{Vect}(e)$ est la droite $\mathscr{D}_e$;
— de même, si $u, v \in E$ sont non colinéaires, $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathscr{P}_{u,v}$.

Les deux derniers exemples se visualisent plus facilement une fois la proposition suivante démontrée.

Proposition XVIII.10. Soit $A \subset E$. Alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.

Démonstration. Posons F l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. Il s'agit naturellement d'un s–e.v de E contenant A et donc, par minimalité, $\mathrm{Vect}(A) \subset F$. De plus, tout s–e.v de E contenant A doit contenir F par stabilité, *ergo* $F \subset \mathrm{Vect}(A)$. □

✍ **Exercice XVIII.2.** Soient $u = (1, 1)$ et $v = (2, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{K}^2$. Déterminer l'espace $\mathrm{Vect}(u, v)$.

➥ **Correction :** *u et v sont colinéaires, donc* $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u) = \mathscr{D}_u$.

Proposition XVIII.11. Soient $A, B \subset E$. Alors :

(i) $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ avec égalité si et seulement si A est un s–e.v de E ;
(ii) $\mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(A)$;
(iii) $(A \subset B) \Rightarrow (\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B))$;
(iv) $\mathrm{Vect}(A \cap B) \subset \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$.

Démonstration. (i) L'inclusion est immédiate ; le cas d'égalité se traite en remarquant que si A est $\mathbb{K}$–e.v , alors il s'agit bien du plus petit s–e.v de E contenant A.

(ii) Trivial.

(iii) Si $A \subset B$, alors tout s–e.v de E contenant B contient A et donc $\mathrm{Vect}(A)$, d'où le résultat.

(iv) $A \cap B \subset A$ et donc $\mathrm{Vect}(A \cap B) \subset \mathrm{Vect}(A)$ par (iii). On procède symétriquement avec B.

□

✖ **Attention :** on n'a pas l'égalité $\mathrm{Vect}(A \cap B) = \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$ dans le cas général. Prendre comme contre–exemple $A = \{(1, 2)\}$ et $B = \{(2, 4)\}$ dans $\mathbb{R}^2$: on a $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(B)$ et $\mathrm{Vect}(A \cap B) = \mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.

4.⁻ Familles remarquables de vecteurs

On fixe dans cette partie un $\mathbb{K}$–e.v E.

a) Familles libres, familles génératrices, bases

Définition XVIII.8. Soit $\mathscr{F} = (e_i)_i i \in I$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{F}$ est :
- **libre** si pour tout élément de E s'écrivant comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$, cette écriture est unique ;
- **génératrice** si tout élément de E s'écrit d'**au moins** une façon comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$;
- une **base** de E si elle est libre et génératrice.

✌ **Remarque XVIII.9.** $\mathscr{F}$ est une base si et seulement si tout vecteur de E s'écrit d'une unique façon comme combinaison linéaire des e_i.

➠ **Exemple XVIII.11.**
- La famille vide $\mathscr{F} = ()$ est libre.
- Si $u \in E$, alors $((u)$ est libre$) \Leftrightarrow (u \neq 0)$.
- Si $u, v \in E$ sont non colinéaires, alors (u, v) est libre.
- Pour tout $A \subset E$, $(a)_{a\in A}$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(A)$.
- Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$, où
$$\varepsilon_i = (\delta_{i,j})_{j\in[\![1,n]\!]} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0 \dots, 0)$$
est une base, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.
- Par construction, la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, également appelée **base canonique** de cet ensemble.
- Vous l'aurez deviné, $\mathbb{K}_n[X]$ a aussi une base canonique (pas de jaloux) : la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
- *Quid* de la décomposition en éléments simples, cher lecteur ?
- Nous verrons dans le chapitre XIX que les matrices élémentaires forment une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Vocabulaire. Une famille non libre est dite **liée**. De plus, on parle parfois de vecteurs **linéairement indépendants** lorsque l'on considère une famille libre. Enfin, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et que $x \in E$ s'y décompose comme :
$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i$$
alors les x_i sont appelés **coordonnées** de x dans cette base.

✌ **Remarque XVIII.10.** Rappelons au passage que la somme *supra* est en fait finie.

Proposition XVIII.12. Soit $\mathscr{F} = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$\mathscr{F}$ est libre

$\Leftrightarrow$

pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ presque nulle de scalaires,
$$\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0\right) \Rightarrow (\forall i \in I,\ \lambda_i = 0)\,.$$

Démonstration.

($\Downarrow$) Découle de l'unicité de la décomposition de 0 selon $\mathscr{F}$.

($\Uparrow$) Supposons que $x \in E$ admette deux décompositions selon $\mathscr{F}$: $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ et $x = \sum_{i \in I} \mu_i e_i$. Alors :

$$0 = x - x = \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i$$

et donc, pour tout $i \in I$, $\lambda_i = \mu_i$.

□

Par conséquent, pour démontrer qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ est libre, on procède comme suit :

— on se donne une famille $(\lambda_i)_i$ de scalaires presque nulle telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$;

— on démontrer que $\forall i \in I,\ \lambda_i = 0$.

➠ **Exemple XVIII.12.** La famille $(\cos, \sin)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En effet, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont tels que $\lambda \cos + \mu \sin = 0$, alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$$

et donc, en évaluant en 0 (resp. $\frac{\pi}{2}$) on obtient que $\lambda = 0$ (resp. $\mu = 0$).

✌ **Remarque XVIII.11.** Il découle de la proposition XVIII.12 qu'une famille $\mathscr{F} = (e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est liée si et seulement si il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_i$ telle que :

— il existe $i_0 \in I$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$;

— $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$.

Ceci est équivalent au fait que :

$$e_{i_0} = \frac{-1}{\lambda_{i_0}} \sum_{i \neq i_0} \lambda_i e_i \ .$$

Une famille est donc liée si et seulement si l'un de ses vecteurs s'exprime en tant que combinaison linéaire des autres.

➠ **Exemple XVIII.13.** La famille $((1,0,0),(0,2,0),(1,1,0))$ est liée dans $\mathbb{K}^3$.

✖ **Attention :** ne pas confondre famille liée (non libre) et famille génératrice.

Proposition XVIII.13. Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Démonstration. Si on se donne une telle famille $(P_i)_{i \in I}$ et que l'on suppose qu'il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires dont au moins l'un des membres est non nul et telle que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i P_i = 0$$

alors, en posant $d = \max\{\deg(P_j) \mid \lambda_j \neq 0\}$ on a, par somme de polynômes de degrés distincts que

$$\deg\left(\sum_{i\in I}\lambda_i P_i\right) = d\,,$$

ce qui est absurde. □

Vocabulaire. Une telle famille est dite "de degrés échelonnés".

✖ **Attention :** la réciproque est **fausse** : la famille (X^2, X^2+2) est libre sans être de degrés échelonnés.

b) Maximalité, minimalité

Proposition XVIII.14.
(i) Toute sous–famille d'une famille libre est libre ;
(ii) toute sur–famille d'une famille liée est liée ;
(iii) toute sur–famille d'une famille génératrice est génératrice.

Démonstration. Trivial. □

Proposition XVIII.15. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. Les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes :
(i) $\mathscr{F}$ est libre et toutes ses sur–familles sont liées ;
(ii) $\mathscr{F}$ est génératrice et toutes ses sous–familles ne sont pas génératrices ;
(iii) $\mathscr{F}$ est une base de E.

✌ **Remarque XVIII.12.** Ceci signifie que les bases sont exactement les familles libres maximales et les familles génératrices minimales. Ceci sera très important dans le chapitre XIX.

Démonstration.

(i)⇒(ii) Si $\mathscr{F}$ est libre maximale, alors pour tout $e \in E$, $\mathscr{F} \cup \{e\}$ est liée et donc e s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F} \cup \{e\}$, *i.e* des vecteurs de $\mathscr{F}$. La famille est donc génératrice. Pour montrer que $\mathscr{F}$ est génératrice minimale, il nous suffit de remarquer qu'aucun des vecteurs de $\mathscr{F}$ ne peut s'exprimer en fonction des autres (par liberté). De fait, aucune sous–famille de $\mathscr{F}$ ne peut être génératrice.

(ii)⇒(iii) Supposons $\mathscr{F}$ génératrice minimale. Alors, si $\mathscr{F}$ était liée, l'un de ses vecteurs serait combinaison linéaire des autres et donc $\mathscr{F}$ privée de celui–ci serait génératrice, ce qui est absurde. $\mathscr{F}$ est donc une base de E.

(iii)⇒(i) Si $\mathscr{F}$ est une base, elle est libre. De plus, tout vecteur $e \in E$ s'exprime dans $\mathscr{F}$ (elle est génératrice), donc $\mathscr{F}\cup\{e\}$ est liée, ce qui assure la maximalité.

□

c) Lien aux applications linéaires

Proposition XVIII.16. Soit F un $\mathbb{K}$–e.v et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors :

(i) $f(\text{Vect}(\mathscr{F})) = \text{Vect}(f(\mathscr{F}))$;

(ii) (f injective) $\wedge$ ($\mathscr{F}$ libre) $\Rightarrow$ ($f(\mathscr{F})$ libre) ;

(iii) (f surjective) $\wedge$ ($\mathscr{F}$ génératrice) $\Rightarrow$ ($f(\mathscr{F})$ génératrice).

Démonstration. On pose $\mathscr{F} = (e_i)_{i\in I}$. Dans ce cas, on a naturellement $f(\mathscr{F}) = (f(e_i))_{i\in I}$.

(i) Soit $y \in F$. Alors :

$$\begin{aligned} y \in f(\text{Vect}(\mathscr{F})) &\Leftrightarrow \exists\, (\lambda_i)_i \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } y = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) \\ &\Leftrightarrow \exists\, (\lambda_i)_i \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } y = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) \\ &\Leftrightarrow y \in \text{Vect}(f(\mathscr{F}))\, . \end{aligned}$$

(ii) Supposons que $\mathscr{F}$ soit libre et f injective. Si $(\lambda_i)_i$ est une famille presque nulle de scalaires telle que $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0$ alors

$$0 = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right)$$

et donc, par injectivité :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0\, .$$

De plus, $\mathscr{F}$ est libre, donc on peut conclure que les λ_i sont tous nuls.

(iii) Supposons $\mathscr{F}$ génératrice et f surjective. Alors :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(f(\mathscr{F})) &= f(\text{Vect}(\mathscr{F})) \text{ par (i)} \\ &= f(E) \text{ car } \mathscr{F} \text{ est génératrice} \\ &= F \text{ car } f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

et donc $f(\mathscr{F})$ est génératrice dans F.

□

✌ **Remarque XVIII.13.** Cela signifie que si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et que f est une application linéaire, la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ engendre $\text{Im}(f)$, *i.e*

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x_i))_{i\in I}\, .$$

Corollaire XVIII.16.a. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, F un $\mathbb{K}$–e.v et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

(i) f est injective $\Leftrightarrow$ $f(\mathscr{B})$ est libre ;

(ii) f est surjective $\Leftrightarrow$ $f(\mathscr{B})$ est génératrice ;

(iii) f est bijective $\Leftrightarrow$ $f(\mathscr{B})$ est une base.

Tout ceci nous permet de démontrer ce qui est sans doute le résultat élémentaire le plus important de la théorie des applications linéaires.

Proposition XVIII.17. Soit F un $\mathbb{K}$–e.v , soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F indexée par le même ensemble que $\mathscr{B}$. Alors :

$$\exists!\, f \in \mathscr{L}(E,F), \quad \forall i \in I,\ f(e_i) = f_j\,.$$

✌ **Remarque XVIII.14.** Une conséquence de ceci est qu'UNE APPLICATION LINÉAIRE EST TOTALEMENT DÉTERMINÉE PAR LA DONNÉE DE L'IMAGE D'UNE BASE DE SON ENSEMBLE DE DÉPART. Ceci est absolument fondamental, et nous permettra de définir de telles applications uniquement par la donnée de leurs valeurs sur les vecteurs d'une base.

Démonstration. Soit $x \in E$; alors x se décompose dans la base $\mathscr{B}$, disons par $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$. De fait, si f est application linéaire vérifiant la condition donnée :

$$f(x) = f\left(\sum_{i\in I} x_i e_i\right) = \sum_{i\in I} x_i f(e_i) = \sum_{i\in I} x_i f_i$$

et donc f est entièrement déterminée par la donnée des f_i. Réciproquement, le mécanisme

$$\sum_{i\in I} x_i e_i \mapsto \sum_{i\in I} x_i f_i$$

définit bien une application linéaire (en exercice pour notre lecteur motivé). □

➠ **Exemple XVIII.14.**

— L'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (1,0,0) &\mapsto (1,0) \\ (0,1,0) &\mapsto (0,1) \\ (0,0,1) &\mapsto (0,2) \end{aligned}$$

est bien définie. Plus précsiément, si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$\begin{aligned} f((x,,y,z)) &= xf((1,0,0)) + yf((0,1,0)) + zf((0,0,1)) \\ &= x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1) + z\cdot(0,2) \\ &= (x, y+2z)\,. \end{aligned}$$

Cette application est surjective car l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par f est génératrice de $\mathbb{R}^2$. Elle n'est pas injective car

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(0,-2z,z) | z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0,-2,1))\,.$$

— L'application linéaire

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (1,0) &\mapsto \cos \\ (0,1) &\mapsto \sin \end{aligned}$$

est bien définie et injective car l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par g est $(\cos,\sin)$, qui est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

5.⁻ Sous–espaces supplémentaires

On fixe dans cette partie un $\mathbb{K}$–e.v E.

a) Somme de deux s–e.v

Soient F et G deux s–e.v de E. Nous avons vu que l'ensemble $F \cup G$ n'était pas en général un s–e.v de E ; cependant l'espace engendré $\text{Vect}(F \cup G)$ en est bien un. La question à laquelle nous devons répondre à présent est : certes, mais qui est–il ?

Proposition XVIII.18. Soient F et G deux s–e.v de E. Alors l'espace $\text{Vect}(F \cup G)$ est égal à

$$F + G = \{x + y \,|\, (x, y) \in F \times G\} .$$

Démonstration. On procède par double inclusion pour montrer que $F+G = \text{Vect}(F \cup G)$.

($\supset$) Il est clair que $F \cup G \subset F + G$ car $0 \in F$ et $0 \in G$. Il est de plus aisé de vérifier que $F + G$ est un s–e.v de E, ce qui entraîne par minimalité que $\text{Vect}(F \cup G) \subset F + G$.

($\subset$) Soit H un s–e.v de E contenant $F \cup G$; alors pour tout $(x, y) \in F \times G$, $x, y \in F \cup G \subset H$ et donc $x+y \in H$. Ainsi $F+G \subset H$ et donc $F+G \subset \text{Vect}(F \cup G)$ par minimalité.

□

➠ **Exemple XVIII.15.** Dans $\mathbb{K}^2$, $Vect((0, 1)) + \text{Vect}((1, 1)) = \mathbb{K}^2$ et

$$Vect((0, 1)) + \text{Vect}((0, -1)) = \mathscr{D}_{(0,1)} .$$

b) Somme directe

Définition XVIII.9. Soient F, G deux s–e.v de E. On dit que F et G sont en **somme directe** si :

$$\forall z \in F + G,\ \exists\,(x, y) \in F \times G,\ z = x + y .$$

Notation. L'ensemble $F + G$ est alors noté $F \oplus G$.

✌ **Remarque XVIII.15.** La nouveauté est ici l'unicité de la décomposition selon F et G.

Proposition XVIII.19. Soient F et G deux s–e.v de E. Alors :

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \iff F \cap G = \{0\}.$$

Démonstration.

($\Downarrow$) Si $x \in F \cap G$, alors $x = 0 + x = x + 0$ et donc, par unicité de la décomposition, $x = 0$.

($\Uparrow$) Soit $z \in F + G$ que l'on suppose décomposable comme $z = x + y$ et $z = x' + y'$ avec $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$. Alors $\underbrace{x - x'}_{\in F} = \underbrace{y' - y}_{\in G}$, ce qui entraîne que $x - x', y' - y \in F \cap G = \{0\}$ d'où le résultat.

□

➠ **Exemple XVIII.16.**
- Si $u, v \in E$ sont non colinéaires, alors $\mathscr{D}_u$ et $\mathscr{D}_v$ sont en somme directe. De plus, $\mathscr{D}_u \oplus \mathscr{D}_v = \mathscr{P}_{u,v}$.
- Posons, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \text{Vect}(\cos)$ et $G = \text{Vect}(\sin)$. Alors, si $f \in F \cap G$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f = \lambda \cos = \mu \sin$. De fait, $f(0) = \lambda$ et $f(0) = 0$ donc $\lambda = 0$ *ergo* $f = 0$. On en déduit que F et G sont en somme directe.

Définition XVIII.10. Deux s–e.v F et G de E sont dit supplémentaires si $E = F \oplus G$.

✌ **Remarque XVIII.16.** En pratique, il faut donc démontrer que :
- F et G sont en somme directe ;
- $E \subset F + G$.

➠ **Exemple XVIII.17.** On vérifie aisément que $\mathbb{K}^2 = \text{Vect}((0,1)) \oplus \text{Vect}((1,0))$.

✍ **Exercice XVIII.3.** Soit F l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et G celui des fonctions paires.

(a) Démontrer que F et G sont des s–e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b) Montrer que
$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G\,.$$

➥ **Correction :**

(a) Immédiat via la caractérisation des s–e.v .

(b) Commençons par remarquer que si $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ alors $g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ est paire et $h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ est impaire. Ainsi, $f = h + g \in F + G$ et donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F + G$. ***Cette décomposition est souvent utile ; elle est à retenir.*** *Pour conclure, il suffit de noter que si $f \in F \cap G$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x) = -f(x)$ et donc $f = 0$.*

✌ **Remarque XVIII.17.** Supposons trouvés F et G deux s–e.v supplémentaires de E. Alors, si l'on dispose d'une base $\mathscr{F}$ de F et d'une base $\mathscr{G}$ de G, on démontre aisément que $\mathscr{B} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ est une base de E. On parle de **base adaptée** aux sous–espaces F et G.

Proposition XVIII.20. Soient F et G deux s–e.v supplémentaires de E. Alors, pour tout couple $(u, v) \in \mathscr{L}(F) \times \mathscr{L}(G)$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f_{|_F} = u$ et $f_{|_G} = v$.

Démonstration. Ceci découle de la remarque *supra* et de la proposition XVIII.17. □

c) Projecteurs

Définition XVIII.11. Un endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ est appelé un **projecteur** si

$$p \circ p = p\,.$$

Exemple XVIII.18.

- id_E est un projecteur ;
- $(x, y) \mapsto (x, 0)$ est un projecteur sur $\mathbb{K}^2$;
- de façon plus générale, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (0, \dots, 0, \underbrace{x_i}_{i}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

  est un projecteur.

Exercice XVIII.4. Soit p un projecteur et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E \backslash \{0\}$ vérifiant $p(x) = \lambda x$. Démontrer que $\lambda \in \{0, 1\}$.

Proposition XVIII.21. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

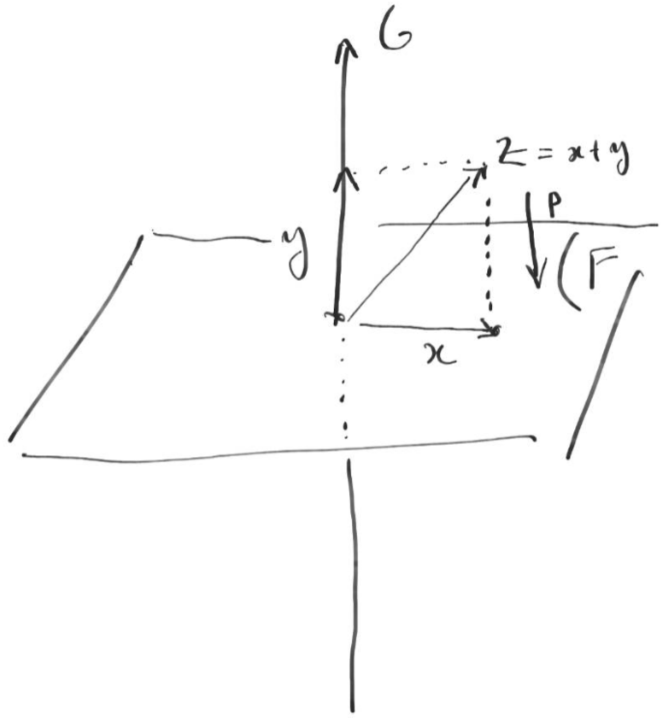
p est un projecteur
$\Longleftrightarrow$
il existe deux s–e.v F et G **supplémentaires** dans E tels que :

(i) $\forall x \in F$, $p(x) = x$;

(ii) $\forall x \in G$, $p(x) = 0$.

Dans ce cas, F et G sont de plus uniques.

Vocabulaire. On dit alors que p est **le projecteur sur F parallèlement à G.**



Démonstration.

($\Uparrow$) Soit $z \in E$, de décomposition $z = x+y \in F \oplus G$. Alors $p \circ p(z) = p(p(x)+p(y)) = p(x) = x$ et $p(z) = p(x) + p(y) = p(x) = x$, donc p est bien un projecteur.

($\Downarrow$) Supposons que p soit un projecteur et posons

$$G = \operatorname{Ker}(p) \quad \text{et} \quad F = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{id}_E) = \{x \in E \,|\, p(x) = x\}\,.$$

Il est clair que F et G vérifient les conditions (i) et (ii) de la proposition. De plus, si $x \in F \cap G$ alors $p(x) = x$ et $p(x) = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$ *ergo* F et G sont en somme directe. Pour conclure quant au caractère supplémentaire de F et G, fixons $z \in E$ et notons que :

$$p(z - p(z)) = p(z) - p \circ p(z) = p(z) - p(z) = 0$$

et donc :

$$z = \underbrace{z - p(z)}_{\in G} + \underbrace{p(z)}_{\in F} \in F \oplus G\,.$$

Pour démontrer, remarquons que si F et G sont deux s–e.v de E tels que soit p le projecteur sur F relativement à G, alors, pour tout $z \in E$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$ et :

$$\begin{aligned} p(z) = 0 &\Leftrightarrow p(x+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow p(x) + p(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in G\,. \end{aligned}$$

De plus, $p \circ p(z) = z$ donc p$p(z) = p(x+0) = p(x) = x$. *In fine*, on a :

— $F = \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{id}_E)$;

— $G = \mathrm{Ker}(p)$.

□

✌ **Remarque XVIII.18.** On déduit de tout ceci que si p est un projecteur alors $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. De plus, si p est bijectif alors $\mathrm{Ker}(p) = \{0\}$ et donc $p = \mathrm{id}_E$.

✍ **Exercice XVIII.5.** Soient $u = (1, 1)$ et $v = (0, 1)$. Décrire le projecteur sur $\mathscr{D}_u$ parallèlement à $\mathscr{D}_v$ dans $\mathbb{K}^2$.

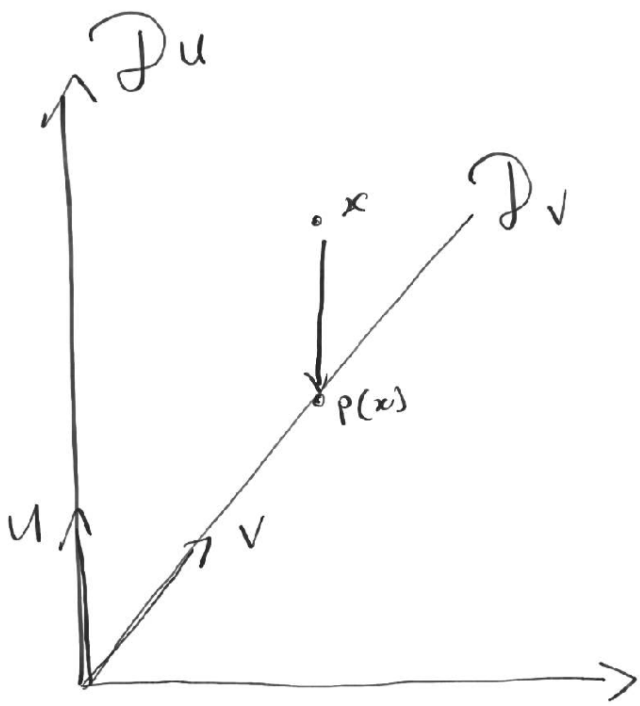
➥ **Correction :** *Commençons par remarquer que les deux droites en question sont bien supplémentaires : elles sont clairement en somme directe (leurs vecteurs directeurs sont non colinéaires) et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ on a :*

$$(x, y) = x \cdot u + (y - x) \cdot v\,,$$

expression que le lecteur averti pourra retrouver à l'aide d'un système linéaire en cherchant $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $(x, y) = \lambda u + \mu v$. De fait, le projecteur p sur $\mathscr{D}_u$ parallèlement à $\mathscr{D}_v$ est donné par :

$$p : (x, y) \mapsto x \cdot (1, 1) = (x, x)\,.$$

Il "suffit" de conserver la "coordonnée" selon u.



✍ **Exercice XVIII.6.** De la même façon, déterminer le projecteur sur $\mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((0, 0, 1))$ dans $\mathbb{K}^3$.

d) Symétries

Définition XVIII.12. Une application $s \in \mathscr{L}(E)$ est appelée **symétrie** si $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

✌ **Remarque XVIII.19.** Une symétrie est automatiquement un automorphisme. Il s'agit même d'une involution.

➠ **Exemple XVIII.19.**
— id_E est une symétrie ;
— $x \mapsto -x$ est une symétrie ;
— $(x,y) \mapsto (y,x)$ est une symétrie de $\mathbb{K}^2$;
— de façon plus générale, pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$, l'application

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j} : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1,\dots,x_n) &\mapsto (x_1,\dots,\underbrace{x_j}_{i},\dots,\underbrace{x_i}_{j},\dots,x_n) \end{aligned}$$

est une symétrie.

✍ **Exercice XVIII.7.** Soit s une symétrie et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ vérifiant $s(x) = \lambda x$. Démontrer que $\lambda \in \{-1, 1\}$.

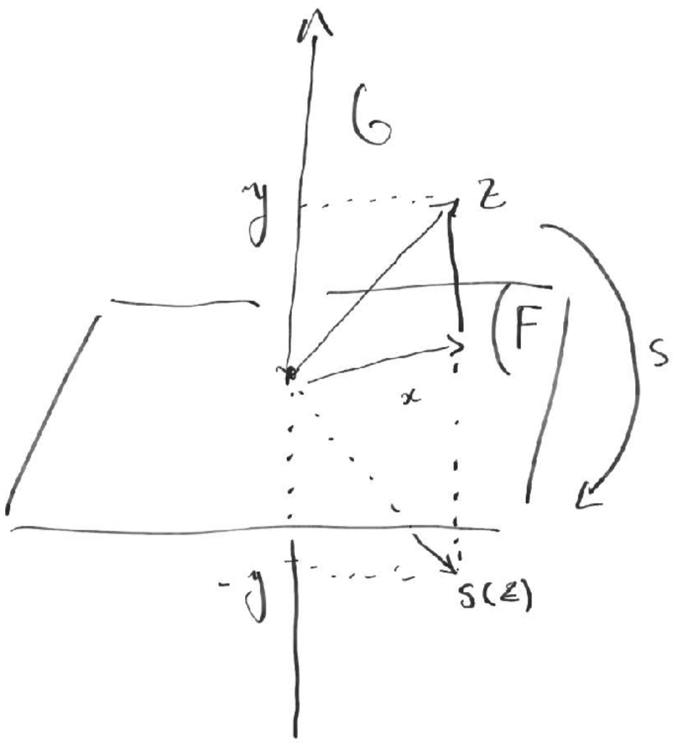
Proposition XVIII.22. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

s est une symétrie
$\Longleftrightarrow$
il existe deux s–e.v F et G **supplémentaires** dans E tels que :

(i) $\forall x \in F,\ s(x) = x$;
(ii) $\forall x \in G,\ s(x) = -x$.

Dans ce cas, F et G sont de plus uniques.

Vocabulaire. On parle de **symétrie par rapport à F parallèlement à G.**



Démonstration. ($\Uparrow$) Soit $z \in E$, de décomposition $z = x + y \in F \oplus G$. Alors $s \circ s(z) = s(s(x) + s(y)) = s(x - y) = x + y = z$ donc s est bien une symétrie.

($\Downarrow$) Supposons que s soit une symétrie et posons

$$G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)\,.$$

Il est clair que F et G vérifient les conditions (i) et (ii) de la proposition. De plus, si $x \in F \cap G$ alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$, donc $F \cap G = \{0\}$ *ergo* F et G sont en somme directe. Pour conclure quant au caractère supplémentaire de F et G, fixons $z \in E$ et notons que :

$$z = \underbrace{\frac{z + s(z)}{2}}_{\in F} + \underbrace{\frac{z - s(z)}{2}}_{\in G} \in F + G\,.$$

L'unicité se traite de façon similaire au cas des projecteurs. □

➠ **Exemple XVIII.20.** On retrouve dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ des procédés vus au collège et au lycée. On peut également chercher à déterminer dans $\mathbb{K}^2$ la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}((1,1))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((0,1))$; on trouve

$$s : (x, y) \mapsto (x, y) = x \cdot (1,1) - (y - x) \cdot (0,1) = (x, 2x - y)\,.$$

e) Hyperplans

Définition XVIII.13. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit H un s–e.v de E. On dit que H est un **hyperplan** de E si il existe une forme linéaire **non nulle** φ sur E telle que :

$$H = \mathrm{Ker}(\varphi)\,.$$

➠ **Exemple XVIII.21.**
— L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + 2z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
— L'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(\pi) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$, noyau de eval_π.

Proposition XVIII.23. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v et soit H un s–e.v de E. Alors :

$$\begin{gathered} H \text{ est un hyperplan} \\ \Longleftrightarrow \\ \forall a \notin H, \quad H \oplus \mathscr{D}_a = E. \end{gathered}$$

Démonstration.

($\Downarrow$) Soit H un hyperplan ; il existe par définition une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Notons que comme $\varphi \neq 0$, il existe $a \notin H$ et on a alors pour tout tel vecteur a :
— $H \cap \mathscr{D}_a = \{0\}$ car $\mathscr{D}_a$ est une droite non comprise dans H ;

— pour tout $x \in E$:

$$x = \underbrace{x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a}_{\in H} + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a$$

et donc $E = H + \mathscr{D}_a$.

En conclusion, H et $\mathscr{D}_a$ sont supplémentaires, d'où le point (i).

($\Uparrow$) Soit $a \notin H$; alors $E = H \oplus \mathscr{D}_a$ et donc l'unique application linéaire envoyant H sur $0_{\mathbb{K}}$ et a sur $1_{\mathbb{K}}$ convient.

$\square$

✌ **Remarque XVIII.20.**

— Si $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ alors $\{\phi \in E^* \mid H = \mathrm{Ker}(\phi)\}$ est la droite $\mathscr{D}_\varphi \subset E^*$.

— Il suffit de l'existence d'un seul vecteur $e \notin H$ tel que $H \oplus \mathscr{D}_e = E$ pour que H soit un hyperplan. En effet, dans ce cas pour tout $a \notin H$ il existe un unique couple $(h, \lambda) \in H \times \mathbb{K}$ tel que $a = h + \lambda e$. De plus, $\lambda \neq 0$ car $a \notin H$, ce qui permet d'écrire que :

$$e = \frac{1}{\lambda}(a - h) .$$

Soit $x \in E$: alors il existe un unique couple $(y, \mu) \in H \times \mathbb{K}$ tel que :

$$x = y + \mu e = \underbrace{y - \frac{\mu}{\lambda}h}_{\in H} + \frac{\mu}{\lambda}a$$

et donc $E = H + \mathscr{D}_a$. Or, $a \notin H$ dont $H \cap \mathscr{D}_a = \{0\}$ ce qui entraîne que $E = H \oplus \mathscr{D}_a$.