Chapitre XVII

Analyse asymptotique

On fixe dans tout ce chapitre un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.– Comparaison des fonctions

a) Négligeabilité, domination

Définition XVII.1. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f, g deux fonctions définies au voisinage de a (sauf peut–être en a) et telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut–être en a). On dira que :

— f est **dominée** par g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a ;

— f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Notation. La domination (resp. la négligeabilité) est notée $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ (resp. $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$) ou $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ (resp. $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$).

Exemple XVII.1.

— $x^2 \underset{x\to\infty}{=} o(x^4)$;

— $\dfrac{x^2}{2+x} \underset{x\to 0}{=} \mathcal{O}(x^2)$.

✖ **Attention :** le point où l'étude est effectuée est déterminant ; par exemple $x^2 \underset{x\to\infty}{=} o(x^3)$ mais $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.

Remarque XVII.1.

— Négligeabilité implique domination ;

— les relations o et $\mathcal{O}$ sont transitives ;

— notons que les croissances comparées vues au chapitre II peuvent se traduire par les résultats suivants, si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$:

  — $\ln(x)^\beta \underset{x\to\infty}{=} o(x^\alpha)$;

  — $|\ln(x)|^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^{-\alpha})$;

— $x^\alpha \underset{x\to\infty}{=} o(e^{\gamma x})$.

À ce stade, ceux d'entre vous qui ne sont pas recroquevillés en position fœtale se demandent probablement quel peut bien être l'usage de toutes ces comparaisons. En premier lieu et dans un premier temps, elles nous serviront à lever les indéterminations qui (facheusement) se produisent parfois lors de l'étude de limites.

Exemple XVII.2.
- — $\dfrac{e^x}{x^3} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ car $x^3 \underset{x\to\infty}{=} o(e^x)$.
- — $x^2\ln(x)^7 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

Proposition XVII.1. Soient f, g, h des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(h(x))$. Alors :
(i) $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(h(x))$;
(ii) $f(x)g(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(h(x)^2)$.

Remarque XVII.2. Ce résultat reste vrai en remplaçant "$\mathcal{O}$" par "o".

Démonstration. Immédiat par quotient. □

Remarque XVII.3. Cette proposition pourra être (abusivement) résumée par : "$\mathcal{O}(h(x)) + \mathcal{O}(h(x)) = \mathcal{O}(h(x))$ (et idem avec o et le produit).

b) Équivalence de fonctions

Définition XVII.2. Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de a (sauf peut–être en a) et telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut–être en a). On dit que f est **équivalente** à g en a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$.

Notation. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Exemple XVII.3. $x^3 + x^2 + x + 1 \underset{x\to\infty}{\sim} x^3$.

Remarque XVII.4.
- — Si f admet une limite **finie non nulle** ℓ en a, alors $\dfrac{f(x)}{\ell} \to 1$ et donc $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.
- — Seule les fonctions localement nulles sont équivalentes à 0.
- — l'équivalence de fonctions en un point est une relation ...d'équivalence.

La propositions qui suit est une application directe de la définition d'équivalence des fonctions, dont la démonstrations est laissée en exercice au lecteur habité d'une motivation à l'épreuve des obus.

Proposition XVII.2. Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (sauf peut–être en a) telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Alors :

(i) si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$;

(ii) si le signe de g est constant au voisinage de a, f vérifie la même propriété (avec un signe identique).

✖ **Attention :** la réciproque est **fausse** : il suffit de considérer $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ au voisinage de 0 pour s'en convaincre (j'espère !).

Démonstration. Découle trivialement de la définition d'équivalence. □

➠ **Exemple XVII.4.** $\dfrac{x^2+x}{x^3+x^2} \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc $\dfrac{x^2+x}{x^3+x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Proposition XVII.3. Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (sauf peut–être en a). Alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)).$$

✌ **Remarque XVII.5.** Cela nous permet de traduire le fait que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ par l'égalité $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$ au voisinage de a. Ceci sera très utile en pratique.

Démonstration.

(⇒) En posant $h = \dfrac{f}{g}$, on a $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et :

$$f(x) = h(x)g(x) \text{ au voisinage de } a.$$

On a donc, au voisinage de a :

$$f(x) - g(x) = (\underbrace{h(x) - 1}_{\to 0})g(x)$$

d'où le résultat.

(⇐) En posant $h = \dfrac{f}{g}$, on a $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et :

$$f(x) - g(x) = h(x)g(x) \text{ au voisinage de } a.$$

De fait, toujours au voisinage de a, on a :

$$f(x) = (\underbrace{h(x) + 1}_{\to 1})g(x)$$

d'où le résultat.

□

Proposition XVII.4. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g, h définies au voisinage de a (sauf peut–être en a) telles que (toujours au voisinage de a) on ait :
— $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;
— $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.
Alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Démonstration. Immédiat par quotient. □

Proposition XVII.5. Soient f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$ et $g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$. Alors :

(i) $f_1(x)g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)g_2(x)$;

(ii) **SI** g_1 ne s'annule pas au voisinage de a, c'est également le cas de g_2 et

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

✖ **ATTENTION :** on ne somme **PAS** les équivalents : $x \underset{x\to\infty}{\sim} x+1$ et $-x \underset{x\to\infty}{\sim} -x+1$ et pourtant $0 \underset{x\to\infty}{\not\sim} 2 \ldots$

Démonstration. Quitte à yada yada, il existe deux fonctions h, k ayant pour limite 1 en a telles que, au voisinage de a :

$$f_1(x) = h(x)f_2(x) \text{ et } g_1(x) = k(x)g_2(x)$$

et donc :

$$f_1(x)g_1(x) = (\underbrace{h(x)k(x)}_{\to 1})f_2(x)g_2(x)$$

d'où le résultat pour le produit. Le reste se démontre de façon analogue. □

➠ **Exemple XVII.5.** $\dfrac{x^2+x}{x^3+x^2} \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ car $x^2+x \underset{x\to\infty}{\sim} x^2$ et $x^3+x^2 \underset{x\to\infty}{\sim} x^3$.

c) Zoologie zérocentrique des équivalents usuels

Proposition XVII.6. On dispose des équivalents suivants en 0 :

(i) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(ii) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(iii) $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$;

(iv) $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(v) $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(vi) $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$;

(vii) $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(viii) $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$;

(ix) $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(x) $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(xi) $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Démonstration. Cela découle dans presque tous les cas de la limite du taux d'accroissement des fonctions étudiées en 0 ; par exemple

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = e^0 .$$

Le point (vi) provient de l'égalité, pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} 1 - \cos(x) &= 2\sin(x/2)^2 \\ &\underset{x\to 0}{\sim} 2\frac{x^2}{4} \\ &= \frac{x^2}{2} . \end{aligned}$$

On déduit le point (viii) d'un calcul similaire. □

d) Comparaison des suites numériques

Nous le savons désormais (*cf.* chapitre V), les suites numériques sont des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous pouvons donc leur étendre les notions vues *supra*, via la définition suivante.

Définition XVII.3. Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que v ne s'annule pas. On dit que :
- u est **dominée** par v, noté $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée ;
- u est **négligeable** devant v, noté $u_n = o(v_n)$, si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$;
- u est **équivalente** à v, noté $u_n \sim v_n$, s$u_n = o(v_n)$, si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.-

Toutes les propositions vues précédemment se généralisent, en n'oubliant pas que les choses sont ici bien plus simples car les suites ont la politesse de n'avoir qu'une seule limite !

2.‾ Développements limités

a) Quoi ?

Définition XVII.4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie au voisinage de a. On dira que f admet un **développement limité d'ordre** n **en** a (DL_n(a)) si il existe une famille $a_0, \ldots, a_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

au voisinage de a.

Vocabulaire. La somme apparaissant dans le membre de droite de cette égalité est appelée **partie régulière** du DL. Le reste est appelé **partie négligeable** de celui–ci.

✌ **Remarque XVII.6.**
- Une fonction admettant un DL_n(a) peut donc être approximée au voisinage de a par une fonction polynomiale de degré n.
- On démontre aisément que si f est (im)paire et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, celui–ci ne peut contenir que des puissances (im)paires.
- Quitte à poser $h = x-a$, on peut écrire tout DL_n(a) sous **forme normalisée** :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$$

soit, si $p = \min\{k \in \mathbb{N} \,|\, a_k \neq 0\}$:

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p(a_p + a_{p+1}h + \ldots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p}))\ .$$

Ceci nous permet de démontrer que $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_p h^p$ et, par conséquent, d'étudier le signe de f au voisinage de a.

➠ **Exemple XVII.6.**

— $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$; notons que tous les équivalents usuels vus précédemment nous livrent des DL d'ordre 1 ou 2.
— $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.
— Un exemple fondamental est celui des sommes géométriques ; si $x \in]-1,1[$ et $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^k &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x}+\frac{x^{n+1}}{x-1} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-x}+o(x^n)\ .\end{aligned}$$

— Pour obtenir un DL d'un polynôme, il suffit de tronquer le degré à l'ordre voulu.

Proposition XVII.7. Si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(\mathrm{a})$ pour $a \in \mathbb{R}$, alors ce dernier est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux familles $a_0,\dots a_n$ et $b_0,\dots,b_n$ de réels telles que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k+o((x-a)^n) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k+o((x-a)^n)\ .$$

Alors, par soustraction, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)(x-a)^k \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)\ .$$

Si il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$, on peut poser $k_0=\min\{k \in [\![0,n]\!] \mid a_k \neq b_k\}$ et vérifier que

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k-b_k)(x-a)^k}{(a_{k_0}-b_{k_0})(x-a)^{k_0}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$$

i.e

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)(x-a)^k \underset{x\to a}{\sim} (a_{k_0}-b_{k_0})(x-a)^{k_0}\ .$$

Ceci contredit le fait que cette somme soit un $o_a((x-a)^n)$ car $k_0 \leq n$, d'où le résultat. □

Proposition XVII.8. Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Alors :
(i) f admet un $\mathrm{DL}_0(a) \Leftrightarrow f$ est continue en a ;
(ii) f admet un $\mathrm{DL}_1(a) \Leftrightarrow f$ est dérivable en a.

Démonstration. Le (i) découle de la définition de continuité et le (ii) a été démontré dans le chapitre XI (proposition XI.1). □

✖ **ATTENTION :** ce résultat ne se généralise **PAS** aux ordres supérieurs.

b) Formule de Taylor–Young

Ce résultat découle de la formule établie par Brook Taylor (anglais, 1685—1731) pour les polynômes (et vue au chapitre XIV) et affinée par William Henry Young (anglais, 1863—1942). La démonstration de ce résultat est hors–programme. Il peut toutefois être vu comme une conséquence de la proposition XX.19.

Théorème XVII.9 (Taylor–Young)**.**
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Alors admet un DL_n(a) donné par la formule :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(h^n)\,.$$

✌ **Remarque XVII.7.** Ceci entraîne qu'il y a existence et unicité du DL_npour les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$.

◇ Développements limités usuels en 0

La formule de Taylor–Young permet de démontrer les DL suivants en 0, qui nous seront utiles par la suite.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)\right)\frac{x^k}{k!}+o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\ldots\\ &\qquad \ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arctan(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

c) Pourquoi ?

En pratique, les DL ont de nombreux usages, outre celui de générer de charmantes sessions de calcul. D'une façon générale, ils permettes d'étudier en finesse le comportement d'une fonction au voisinage d'un point donné.

◇ Limites

Une fonction est équivalente à la partie régulière de son DL : cela permet souvent de lever des indéterminations. Par exemple :

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \, .$$

De même, certains taux d'accroissements voient leur vie considérablement simplifiée (d'aucun diraient limitée) par ce type d'étude.

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0,\ \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x - 0} &= \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} - \frac{1}{x} \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{6} + o(x) \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

et donc le sinus cardinal (*cf.* chapitre XI) est dérivable en 0 de dérivée nulle. En réalité, on peut itérer ce procédé et démontrer que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

◇ Extrema locaux

Nous avons vu dans le chapitre XI que toute fonction f dérivable admettant un extremum local en un point $a \in \mathbb{R}$ vérifiait $f'(a) = 0$ (on dit que a est un **point critique** pour f). La notion de développement limité nous permet d'affiner quelque peu cette étude et d'en obtenir une réciproque partielle via la proposition suivante.

Proposition XVII.10. Soit f une fonction **à valeurs réelles** admettant un développement limité d'ordre 2 en un point $a \in \mathbb{R}$ et vérifiant que $f'(a) = 0$. On a de fait l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + \lambda(x-a)^2 + o((x-a)^2) \, .$$

Alors :

(i) si $\lambda > 0$, f admet un minimum local en a ;

(ii) si $\lambda < 0$, f admet un maximum local en a.

Démonstration. Immédiat : au voisinage de a, $f(x) - f(a)$ est du signe de λ si ce dernier est non nul. □

➠ **Exemple XVII.7.** Ceci nous permet de vérifier que cos admet un maximum local en 0.

Remarque XVII.8.

— Dans le cas où $\lambda = 0$, on ne peut conclure. Étudier le cas des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^2$ en 0.

— Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on a $\lambda = \dfrac{f''(a)}{2}$.

d) Opérations sur les développements limités

Dans ce paragraphe, nous nous attachons à donner une série de "recettes" permettant de calculer efficacement avec les développements limités. L'objectif est ici presque purement opérationnel : nous ne nous attarderons pas plus que nécessaire sur le caractère général des résultats énoncé.

◇ Troncature

Pour le moment tout va bien : si une fonction admet un DL_n(a), on peut lui trouver des DL à des ordres inférieurs quitte à tronquer la partie régulière.

◇ Combinaison linéaire

Si $a \in \mathbb{R}$ et f et g sont deux fonctions admettant des DL_n(a), alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ admet un DL_n(a) obtenu en combinant linéairement les parties régulières de ceux de f et g.

Exemple XVII.8. On retrouve de cette façon les DL de ch et sh à partir de celui de exp.

◇ Produit

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soient f, g admettant les DL_n(a) suivants :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)\ .$$

Alors, par relation sur les "o" et produit de polynômes, fg admet le DL_n(a) suivant :

$$f(x)g(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) (x-a)^k + o((x-a)^n)\ .$$

En pratique, il s'agit ici de faire le produit des parties régulières en ne conservant que les puissances inférieures ou égales à n.

Exemple XVII.9. Cherchons à obtenir un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^x \sin(x)$. Pour cela, notons dans un premier temps que :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

et

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})(x - \frac{x^3}{6}) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\ .\end{aligned}$$

In fine, on a donc :

$$e^x \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\ .$$

◇ **Composition**

Aucun résultat général n'est au programme : il s'agit ici de chercher à faire simple et efficace. Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$ (quitte à se ramener en ce point par un changement de variable) **et** que $g(0) = 0$ (ou *a minima* $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, mais je chipote) alors la composée $f \circ g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ (pour peu qu'elle soit bien définie). On trouve la partie régulière de ce dernier en priant très fort.

➠ **Exemple XVII.10.** Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1 + \underbrace{\cos(x) - 1}_{\text{vaut 0 en 0}}) .$$

Or :

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

et

$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

ce qui permet de conclure que :

$$\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

car $(\cos(x) - 1)^2 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.

✖ **Attention :** si il est vrai que l'on peut composer les DL, il ne faut **surtout pas** se laisser aller à composer les équivalents. En effet, $x \underset{x\to\infty}{\sim} x+1$ et pourtant $e^x \underset{x\to\infty}{\not\sim} e^{x+1}$.

◇ **Inverse**

L'idée est ici de composer le DL par celui de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Une fois de plus, un peu de courage et (éventuellement) un sac à vomi sont des atouts précieux.

➠ **Exemple XVII.11.** Développons $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 4 en 0. Faites comme on vous dit et il n'y aura pas de blessé. Commençons par remarquer que :

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \underbrace{(1-\cos(x))}_{\text{vaut 0 en 0}}} .$$

On sait de plus que :

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o(u^4) .$$

En posant, au voisinage de 0, $u = 1 - \cos(x)$ (oui, je sais…), on obtient :

$$u \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) ;$$

$$u^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

et

$$u^3,\ u^4 \underset{x\to 0}{=} o(x^4)\ .$$

Au final, on obtient :

$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\ .$$

Évidemment, pour obtenir le DL d'un quotient, nous passons par le produit de l'inverse. Le lecteur audacieux pourra utiliser l'exemple *supra* pour retrouver le DL de tan en 0.

◇ Primitives

Proposition XVII.11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction admettant un DL_n(a) donné par

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)\ .$$

Alors toute primitive F de f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ donné par la formule :

$$F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})\ .$$

Démonstration. Immédiat. □

Remarque XVII.9. Ceci nous permet de retrouver très rapidement les DL de arctan et $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice XVII.1. Déterminer un DL d'ordre 5 de arcsin en 0.

➥ **Correction :** *On sait que, pour tout* $x \in]-1,1[$ *:*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1+(-x^2))^{-1/2}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)\ .\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\ .$$

3.$^-$ Développements asymptotiques

a) Quoi maintenant ?

Jusque ici, nous avons fait des développements limités, à savoir des approximations de fonction en un point **réel** par un **polynôme**. Un peu contraignant n'est–il pas ? L'objectif de ce paragraphe est d'en finir avec ces limitations et de déverrouiller notre plein potentiel calculatoire. Ou quelque chose de ce genre. Nous nous contenterons de donner quelques exemples afin de nourrir la réflexion (et/ou les cauchemars) de notre lecteur.

➠ **Exemple XVII.12.** Développons la fonction $f : x \mapsto x^x$ en 0. Ne mentez pas, je sais que vous en avez toujours rêvé. On a, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x\ln(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x\ln(x) + \frac{x^2\ln(x)^2}{2} + o(x^2\ln(x)^2)\,. \end{aligned}$$

Notons que la composée de DL ci–dessus est valable car $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Ce résultat ne constitue pas un DL *stricto sensu*, mais nous apporte des informations assez précises sur le comportement asymptotique de f, ce qui est fort sympathique au demeurant : on parle de **développement asymptotique (DA) d'ordre** 2 **en** $x\ln(x)$ **au voisinage de** 0**.**

✍ **Exercice XVII.2.** Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

➥ **Correction :** *Posons, pour $x > 0$, $t = \frac{1}{x}$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1} &= \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} \\ &= \frac{1}{t}\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

et, de façon analogue :

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}\,.$$

En faisant en DL (en t) à l'ordre 4 en 0, nous obtenons que :

$$\sqrt{1 \pm t^2} \underset{t\to 0}{=} 1 \pm \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} + o(t^4)$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{t}\sqrt{1-t^2} &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t} + \frac{t}{2} - \frac{t^3}{8} - \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{2} - \frac{t^3}{8}\right) + o(t^3) \\ &\underset{t\to 0}{=} t + o(t^3)\,. \end{aligned}$$

En conclusion, nous pouvons écrire (en repassant à la variable x) :

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \underset{x\to\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0\,.$$

Notons qu'un DL à l'ordre 1 suffisait (peut–être...). Mais bon, quand on aime, on ne compte pas.

➠ **Exemple XVII.13.** Souvenons nous que, pour tout $x > 0$:

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc, on peut établir que :

$$\arctan(x) \underset{x\to\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) .$$

L'usage des développements asymptotiques permet une flexibilité que n'autorisent pas les DL. On se retrouve donc souvent, dans les sciences fondamentales et appliquées, à en faire usage pour résoudre divers problèmes.

✍ **Exercice XVII.3.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} .$$

1. Démontrer que $I_n = 1 + \mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) .$$

➥ **Correction :**

1. *On vérifie rapidement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$0 \leq 1 - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} .$$

Ainsi, par encadrement, on a le résultat voulu.

2. *Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^n)}{n}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, une IPP nous livre :*

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t \times \frac{t^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t}{n}\ln(1+t^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n}\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t .
\end{aligned}$$

Or, par concavité du logarithme, on a vu dans le chapitre XI que $\ln(1+u) \leq u$ pour $u \in]-1,\infty[$. De fait et par croissance de l'intégrale (que nous reverrons dans le chapitre XX), on a :

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

ce qui entraîne que :

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et donc que :

$$\begin{aligned} I_n - 1 &= -\frac{\ln(2)}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

b) Tangentes, asymptotes

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre XI, le calcul du DL à l'ordre 1 d'une fonction nous livre directement une équation des tangentes à sa courbe représentative. Plus précisément, si une fonction f admet en un point a de son ensemble de définition un DL de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \beta + \alpha(x-a) + o((x-a))$$

alors la droite d'équation $y = \alpha(x-a)+\beta$ est tangente à la courbe de f au point $(a, f(a))$ et la position relative de ces deux objets géométriques peut être déterminée à l'aide du terme suivant (selon les puissances croissantes de $(x-a)$) du DL (si il existe). Tout lien avec la convexité est évidemment non fortuit...

Similairement, si une fonction f admet un DA de la forme

$$f(x) \underset{x\to\infty}{=} ax + b + o(1)\,,$$

alors on peut dire que la droite d'équation $y = ax+b$ est une **asymptote** à la courbe représentative de f au voisinage de l'infini (on peut évidemment faire la même chose en $-\infty$). La aussi, le terme suivant du DA (selon les puissances **décroissantes** de x) nous livrera la position de la courbe relativement à son asymptote.

✍ **Exercice XVII.4.** Étudier tangentes et asymptotes de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$.

c) Formule de Stirling

Achevons ce chapitre (et le lecteur) en énonçant la formule suivante, du à Abraham de Moivre (français, 1667—1754) et James Stirling (écossais, 1692—1770). Le premier démontra la formule sans calculer la constante apparaissant dans l'équivalent, injustice réparée par le second.

Théorème XVII.12 (Stirling)**.**

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,.$$

Démonstration. Admis. □

✌ **Remarque XVII.10.** Cette formule peut être interpretée comme un développement asymptotique. En effet, si

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} + o\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right)$$

alors on a :

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(\ln(n)) .$$

✍ **Exercice XVII.5.** Déterminer la limite de $\left(\frac{e^n}{n!}\right)_n$.