Chapitre XVI

Dénombrement, combinatoire

1.⁻ Ensembles finis

a) Cardinal

On présente dans ce chapitre une version naïve de la théorie des ensembles finis. En particulier, la définition suivante est introduite sans vérifier que le cardinal est défini de façon unique. De façon générale, on passera sous silence toute démonstration technique afin d'alléger l'exposé et de rester dans le cadre du programme de MPSI.

Définition XVI.1. Soit E un ensemble. Alors, on dit que E est **fini** si il existe $n \geq 0$ et $f : E \to [\![1, n]\!]$ bijective. L'entier n est alors unique et appelé **cardinal** de E.

Notation. Le cardinal sera noté indifféremment $|E|$, $\operatorname{card}(E)$ ou parfois $\#E$.

✌ **Remarque XVI.1.** La bijection f représente (heuristiquement) une "façon d'étiqueter" les éléments de E par n entiers successifs.

➠ **Exemple XVI.1.**
- L'ensemble vide est fini de cardinal 0.
- L'ensemble $\{\spadesuit, \pitchfork, \clubsuit\}$ est fini de cardinal 3.

✌ **Remarque XVI.2.** Avec cette définition, il est rapide de vérifier que si E et F sont finis alors :
- il existe une bijection entre E et $F \Leftrightarrow \operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$;
- il existe une injection entre E et $F \Leftrightarrow \operatorname{card}(E) \leq \operatorname{card}(F)$;
- il existe une surjection entre E et $F \Leftrightarrow \operatorname{card}(E) \geq \operatorname{card}(F)$.

Proposition XVI.1. Soit E un ensemble fini et soit $E' \subset E$. Alors :

(i) E' est fini ;

(ii) $\operatorname{card}(E') \leq \operatorname{card}(E)$;

(iii) $E = E' \Leftrightarrow \operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(E')$.

Démonstration. Les points (i) et (ii) découlent du fait que $x \mapsto x$ réalise une injection de E' dans E. Pour le cas d'égalité, procédons en deux temps.

($\Rightarrow$) ¯_(ツ)_/¯

($\Leftarrow$) Par contraposée, supposons que $E \neq E'$. Ceci signifie qu'il existe $e \in E \setminus E'$ et donc, en posant $n = \text{card}(E')$ on a :

$$\text{card}(E' \cup \{a\}) = n + 1$$

et, comme $E \cup \{a\} \subset E$:

$$n = \text{card}(E') < n + 1 \leq \text{card}(E)$$

d'où le résultat.

□

La proposition suivante est au cœur de bien de ce chapitre et de plusieurs de ses applications ultérieures. Il peut donc être utile d'y accorder quelque attention.

Proposition XVI.2. Soient E, F deux ensembles finis **de même cardinal** et soit $f : E \to F$ une application. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective ;

(ii) f est injective ;

(iii) f est surjective.

Démonstration. On procède de façon circulaire.

(i)⇒(ii) Trivial.

(ii)⇒(iii) Supposons f injective ; il en découle que $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$. Par hypothèse, $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ et donc $f(E)$ est une partie de F de cardinal égal à celui de F. *Ipso facto*, $f(E) = F$ et donc f est surjective.

(iii)⇒(i) Supposons f surjective ; alors si $x, y \in E$ sont deux éléments distincts tels que $f(x) = f(y)$, on aurait $\text{card}(f(E)) < \text{card}(E)$, ce qui est absurde car $f(E) = F$ est de même cardinal que E. La fonction f est donc bijective car injective et surjective.

□

✍ **Exercice XVI.1.** Démontrer que tout anneau commutatif intègre fini est un corps.

➥ **Correction :** *Soit $\mathbb{A}$ un anneau intègre fini et soit $a \in \mathbb{A} \backslash \{0\}$. Alors l'application*

$$f_a : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$
$$x \mapsto ax$$

est injective (par intégrité) et donc surjective. De fait, il existe $x \in \mathbb{A}$ tel que $ax = 1$, d'où le résultat.

b) Opérations sur les ensembles finis

Proposition XVI.3. Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles finis **deux à deux disjoints**. Alors, la réunion de ces ensembles est finie et

$$\operatorname{card}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(E_k)\,.$$

✖ **Attention :** évidemment, ceci n'est vrai que pour les ensembles disjoints : le cardinal de la réunion $\{0,1\} \cup \{0,2\}$ n'est pas égal à 4.

Démonstration. Admise pour éviter tout technicité excessive. □

✌ **Remarque XVI.3.** Si les ensembles ne sont pas supposés disjoints, on démontre par récurrence que :

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(E_k)\,.$$

✍ **Exercice XVI.2.** Soit G un groupe fini (noté multiplicativement) et soit H un sous–groupe de G.

1. Justifier que H est fini.
2. (a) Vérifier que la relation

   $$x \sim y \iff xy^{-1} \in H$$

   définit une relation d'équivalence sur G.

   (b) Démontrer que toutes les classes d'équivalences associées à la relation $\sim$ ont le même cardinal.
3. *Théorème de Lagrange.* Déduire de ce qui précède que card(H) divise card(G).

➥ **Correction :**

1. *Immédiat par inclusion dans un ensemble fini.*
2. *(a)* — *Soit $x \in G$; alors $xx^{-1} = e \in H$, donc la relation est réflexive.*
   — *Si $x, y \in G$ sont tels que $x \sim y$, i.e tels que $xy^{-1} \in H$, alors par stabilité $yx^{-1} = (xy^{-1})^{-1} \in H$. De fait, on a bien $y \sim x$ et donc la relation est symétrique.*
   — *Si $x, y, z \in G$ sont tels que $x \sim y$ et $y \sim z$, alors par stabilité $xz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in H$, d'où la transitivité.*

   (b) Soit $x \in H$; alors la classe d'équivalence de cet élément est donné par :

   $$\bar{x} = \{y \in G \,|\, xy^{-1} \in H\}\,.$$

   Ceci signifie que, pour tout $y \in G$, on a :

   $$\begin{aligned} y \in \overline{x} &\iff xy^{-1} \in H \\ &\iff \exists\, h \in H,\ xy^{-1} = h \\ &\iff \exists\, h \in H,\ y = h^{-1}x \end{aligned}$$

et donc

$$\overline{x} = Hx = \{hx \mid h \in H\} .$$

Il est ensuite aisé de démontrer que l'application suivante est une bijection :

$$\begin{array}{rl} \phi : H & \to Hx \\ h & \mapsto hx \end{array} ,$$

ce qui implique que $\text{card}(\overline{x}) = \text{card}(H)$.

3. *On sait que les classes d'équivalences selon $\sim$ partitionnent l'ensemble G ; ceci entraîne qu'il existe une famille $C_1, \dots, C_N$ de telles classes* ***disjointes*** *telles que :*

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{N} C_i$$

ergo :

$$\text{card}(G) = \sum_{i=1}^{N} \text{card}(C_i) = N\text{card}(H) ,$$

d'où le résultat.

Proposition XVI.4. Soient E et F deux ensembles finis. Alors :

(i) **si** $F \subset E$, $E \setminus F$ est fini et

$$\text{card}(E \setminus F) = \text{card}(E) - \text{card}(F) ;$$

(ii) $E \cup F$ et $E \cap F$ sont finis, avec :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F) .$$

✌ **Remarque XVI.4.** La formule du crible de Poincaré, donnant le cardinal d'une réunion quelconque d'ensembles finis est hors programme. Le lecteur averti pourra se référer à la littérature, en prenant garde de porter des lunettes protectrices. En cas de contact direct avec la peau, consulter un médecin.

Démonstration. Il suffit de faire les deux remarques suivantes :

$$E = E \sqcup (E \setminus F)$$

et

$$E \cup F = (E \setminus (E \cap F)) \sqcup F .$$

□

✍ **Exercice XVI.3.** Soient E, F, G trois ensembles finis. Calculer $\text{card}(E \cup F \cup G)$.

➥ **Correction :** *On a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(E\cup F\cup G) &= \mathrm{card}(E\cup F)+\mathrm{card}(G)-\mathrm{card}((E\cup F)\cap G)\\ &= \mathrm{card}(E)+\mathrm{card}(F)+\mathrm{card}(G)-\mathrm{card}((E\cup F)\cap G)-\mathrm{card}(E\cap F)\\ &= \mathrm{card}(E)+\mathrm{card}(F)+\mathrm{card}(G)-\mathrm{card}((E\cap G)\cup(F\cap G))-\mathrm{card}(E\cap F)\\ &= \mathrm{card}(E)+\mathrm{card}(F)+\mathrm{card}(G)\\ &\quad -\mathrm{card}(E\cap G)-\mathrm{card}(F\cap G))-\mathrm{card}(E\cap F)\\ &\quad +\mathrm{card}(E\cap F\cap G)\,.\end{aligned}$$

Proposition XVI.5. Soient E, F des ensembles finis. Alors :
(i) $\mathrm{card}(E\times F)=\mathrm{card}(E)\mathrm{card}(F)$;
(ii) $\mathrm{card}(E^p)=\mathrm{card}(E)^p$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

Démonstration. Il suffit de remarquer pour le (i) que :

$$E\times F=\bigsqcup_{y\in F}E\times\{y\}\,.$$

Le point (ii) se traite ensuite par récurrence sur p. □

➠ **Exemple XVI.2.** Une expérience dans laquelle on a n choix puis m choix possède nm issues. Par exemple, un lancer de deux dés à 6 faces peut donner 36 résultats (pas somme) différents.

c) Parties d'un ensemble fini

Proposition XVI.6. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors :

$$\mathrm{card}(\mathscr{P}(E))=2^n\,.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Le cas $n=0$ est trivial car $\mathscr{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$. Si la propriété est vraie au rang n et que E est un ensemble fini de cardinal n, on fixe $a\in E$ et $E'=E\setminus\{a\}$.

Soit $A\subset E$; alors :
— soit $a\notin A$ et dans ce cas $A\subset E'$. Par hypothèse de récurrence il existe 2^n telles parties ;
— soit $a\in A$ et alors $A\setminus\{a\}\subset E'$. Par hypothèse de récurrence il existe 2^n telles parties.

En conclusion, comme $\mathscr{P}(E)$ est la réunion disjointe des deux ensembles décrits *supra*, il existe $2^n+2^n=2^{n+1}$ parties distinctes de E. □

➠ **Exemple XVI.3.** $\mathrm{card}(\mathscr{P}([\![1,3]\!]))=8$.

d) Applications

Proposition XVI.7. Soient E et F deux ensembles finis. Alors :

$$\mathrm{card}(F^E) = \mathrm{card}(F)^{\mathrm{card}(E)}\,.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $p = \mathrm{card}(E)$.

— Si $p = 0$, E est vide et donc il existe une seule application dans F^E, donnée par le triplet $(\emptyset, F, \emptyset)$.

— Supposons la propriété vérifiée pour tous les ensembles de cardinal p, et fixons E un ensemble de cardinal $p+1$; on fixe $a \in E$ et $E' = E \setminus \{a\}$. Pour définir une application de E dans F il nous faut déterminer l'image de a ($\mathrm{card}(F)$) possibilités puis celles des éléments de E' ($\mathrm{card}(F)^p$ possibilités par hypothèse de récurrence). *In fine*,

$$\mathrm{card}(F^E) = \mathrm{card}(F) \times \mathrm{card}(F)^p = \mathrm{card}(F)^{\mathrm{card}(E)}\,.$$

□

➠ **Exemple XVI.4.** Il existe exactement 27 applications de $[\![1,3]\!]$ dans lui–même, dont 6 sont bijectives (les éléments de $\mathfrak{S}_3$).

✍ **Exercice XVI.4.** Soit E un ensemble fini. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{1} : \mathscr{P}(E) &\to \{0,1\}^E \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

est une bijection. Utiliser ce résultat pour retrouver la formule du cardinal de $\mathscr{P}(E)$.

2.– Un peu de combinatoire

a) Injections, bijections

Si E et F sont deux ensembles finis et que $f \in F^E$, on peut énoncer les reformulations suivantes relatives à l'inj/surj/bijectivité :

— f est **injective** $\Longleftrightarrow$ pour tout $y \in F$, $\mathrm{card}(f^{-1}(\{y\}) \leq 1$;

— f est **surjective** $\Longleftrightarrow$ pour tout $y \in F$, $\mathrm{card}(f^{-1}(\{y\}) \geq 1$;

— f est **bijective** $\Longleftrightarrow$ pour tout $y \in F$, $\mathrm{card}(f^{-1}(\{y\}) = 1$.

De plus, il nous est également possible de dénombrer les injections et bijections de E dans F *via* le résultat suivant. Un résultat (moche) relatif aux surjections existe, mais est hors–programme.

Proposition XVI.8. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Alors :

(i) le nombre d'injections de E dans F est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $n \geq p$ et 0 sinon ;

(ii) le nombre de bijections de E dans F est égal à $n!$ si $n = p$ et 0 sinon.

Démonstration. (i) Pour varier, procédons par récurrence sur $p = \mathrm{card}(E)$. Si $p = 0$, on rigole, et si la propriété est vérifiée au rang p on fixe E un ensemble de cardinal $p+1$, $a \in E$ et $E' = E \setminus \{a\}$. Alors, pour définir une injection $f : E \hookrightarrow F$, il faut :
— choisir l'image de a (n possibilités) ;
— choisir (de façon injective) les images des éléments de E' dans $F \setminus \{f(a)\}$ $\left(\dfrac{(n-1)!}{(n-1-p)!} \text{ ou } 0 \text{ possibilité(s) par hypothèse de récurrence}\right)$.
Ainsi, dans le cas ou la deuxième quantité mentionnée est non nulle, on a le nombre d'injections suivant :

$$n \times \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!} = \frac{n!}{(n-(p+1))!}$$

d'où le résultat.

(ii) Déjà traité au chapitre VIII lors de l'étude du groupe symétrique. On peut aussi utiliser la proposition XVI.2 et remarquer que si $n = p$ alors les injections de E dans F sont bijectives.

□

Notation. La quantité $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ est notée $(n)_p$ et appelée **nombre d'arrangements** de p dans n.

✌ **Remarque XVI.5.** Notons que, si $n \geq p$:

$$(n)_p = n(n-1)\dots(n-p+1)\,.$$

Il s'agit du nombre de façon de classer p éléments parmi n.

➠ **Exemple XVI.5.** Il existe $\dfrac{9!}{2!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 181\,440$ injections de $[\![1,7]\!]$ dans $[\![1,9]\!]$.

Corollaire XVI.8.a. Soit F un ensemble de cardinal n et soit $p \leq n$. Alors l'ensemble des p–listes ordonnées (suites finies d'éléments deux à deux distincts) d'éléments de F est fini de cardinal $(n)_p$.

Démonstration. Il s'agit en fait de dénombrer les injections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. □

➠ **Exemple XVI.6.** Si on effectue 4 tirages **successifs** sans remise dans une urne contenant 10 objets distinguables, il existe $(10)_4 = 5040$ tirages possibles.

b) Parties de taille fixée

Nous venons de voir comment dénombrer les choix de p éléments parmi n **avec** un ordre fixé. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la combinatoire des parties (**non ordonnées**, donc) de taille fixée d'un ensemble fini.

Notation. Si E est un ensemble fini et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal k.

Proposition XVI.9. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$ et soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors :

$$\operatorname{card}(\mathscr{P}_k(E)) = \binom{n}{k}.$$

Démonstration. Une récurrence sur n ? Joie !

— Si $n = 0$, la vie est belle.

— Supposons la propriété vérifiée pour $n \geq 0$. Soit E un ensemble de cardinal $n+1$, soit $A \in \mathscr{P}_k(E)$ et soit $a \in E$; on a alors deux possibilités : soit A ne contient pas a (et on dénombre par hypothèse de récurrence), soit A contient a et alors on dénombre les possibilités pour $A \setminus \{a\}$ via cette même, fort urbaine, hypothèse. *In fine* :

$$\operatorname{card}(\mathscr{P}_k(E)) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

par formule de Pascal.

□

➠ **Exemple XVI.7.** Si on tire 4 boules parmi 10 simultanément, il existe $\binom{10}{4} = 210$ issues possibles. Cela est très différent du tirage avec ordre vu précédemment.

Ces procédés combinatoires nous permettent de démontrer différemment certains résultats vus au chapitre II ; nous offrons gracieusement au lecteur un florilège de ceux–ci.

◇ Sommes des coefficients binomiaux

Si n est un entier naturel, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])) \\
&= \operatorname{card}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])\right) \\
&= \operatorname{card}(\mathscr{P}([\![1,n]\!])) \\
&= 2^n .
\end{aligned}$$

◇ Formule de Pascal

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$ et soit $k \leq n$. On fixe $a \in E$; alors pour construire une partie à k éléments de E, il faut :

— soit choisir k éléments parmi $E' = E \setminus \{a\}$;

— soit choisir $k-1$ éléments parmi E' et ajouter a.

De fait,

$$\operatorname{card}(\mathscr{P}_k(E)) = \operatorname{card}(\mathscr{P}_k(E')) + \operatorname{card}(\mathscr{P}_{k-1}(E'))$$

ce qui se traduit par :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

◇ Binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et soit $n \geq 1$. Alors $(a+b)^n$ se développe en 2^n termes de la forme $a^k b^{n-k}$, où k est le nombre de facteurs dans lequel nous avons "choisi" a pour obtenir ce terme. Ce terme apparaîtra donc $\binom{n}{k}$ car ces k occurrences de a sont à "choisir" parmi n facteurs possibles.

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

3 "choix" de a : $a^3 b^1$