Chapitre XV

Fractions rationnelles

On fixe dans tout ce chapitre un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.⁻ Corps des fractions rationnelles

a) Notion de fraction rationnelle

Nous ne rentrerons pas cette fois–ci dans les détails ; les techniques nous manquent pour définir proprement tout ceci.

Théorème XV.1.
Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$, appelé **corps des fractions rationnelles sur** $\mathbb{K}$ tel que :
- $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$;
- tout corps contenant $\mathbb{K}[X]$ contient également $\mathbb{K}(X)$.

Un tel corps est de plus unique à isomorphisme près.

✌ **Remarque XV.1.** Le corps $\mathbb{K}(X)$ contient donc :
- les polynômes ;
- leurs inverses (sauf pour 0, évidemment), notés $\dfrac{1}{P}$ pour $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Il en découle par minimalité que les éléments de $\mathbb{K}[X]$ sont tous de la forme $P \times \dfrac{1}{Q}$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \neq 0$. Nous utiliserons la notation fractionnelle $\dfrac{P}{Q}$ pour de tels objets.

➠ **Exemple XV.1.** $\dfrac{1}{X}, \dfrac{X^2+4X-1}{X-1} \in \mathbb{K}(X)$.

Opérations sur les fractions rationnelles
Si $P, Q, R, S \in \mathbb{K}[X]$ sont tels que $QS \neq 0$, alors on a :

(i) $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{R}{S} \Leftrightarrow PS = QR$;

(ii) $\dfrac{P}{Q} + \dfrac{R}{S} = \dfrac{PS+QR}{QS}$;

(iii) $\dfrac{P}{Q} \times \dfrac{R}{S} = \dfrac{PR}{QS}$.

✖ **ATTENTION :** la représentation d'une fraction rationnelle n'est pas unique :

$$\frac{X}{1} = \frac{X^2}{X} = X \,.$$

Théorème XV.2 (Forme irréductible d'une fraction rationnelle)**.**
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors il existe un unique couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que :

(i) $P \wedge Q = 1$;
(ii) Q soit unitaire ;
(iii) $F = \dfrac{P}{Q}$.

Démonstration. Similaire à la forme irréductible d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{Q}$ vue au chapitre X. □

b) Degré

Proposition/définition XV.1. Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Alors la quantité $\deg(P) - \deg(Q) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ne dépend pas de la représentation choisie et est appelée **degré** de F.

Notation. $\deg(F)$

Démonstration. Si F admet une autre écriture $F = \dfrac{R}{S}$, alors $PS = QR$ et donc $\deg(P) + \deg(S) = \deg(Q) + \deg(R)$, ce qui entraîne que :

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(R) - \deg(S) \,.$$

□

➠ **Exemple XV.2.** $\deg\left(\dfrac{X^2+1}{X^3}\right) = -1$.

✖ **ATTENTION :** une fraction rationnelle de degré nulle peut ne pas être constante : considérer $\dfrac{X}{X+2}$.

✌ **Remarque XV.2.**
— *deg*$(F) = -\infty \Leftrightarrow F = 0$;
— $\deg(F) \leq 0 \Leftrightarrow \deg(P) \leq \deg(Q)$.

Proposition XV.3. Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$. Alors :

(i) $\deg(F+G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$, avec égalité lorsque $\deg(F) \neq \deg(G)$;

(ii) $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$.

Démonstration. Posons, pour fixer les idées, $F = \dfrac{P}{Q}$ et $G = \dfrac{R}{S}$.

(i) On sait que $F + G = \dfrac{PS+QR}{QS}$ et donc :

$$\begin{aligned}
\deg(F+G) &= \deg(PS+QR) - \deg(QS) \\
&\leq \max(\deg(PS), \deg(QR)) - (\deg(Q) + \deg(S)) \text{ par degrés polynomiaux} \\
&= \max(\deg(P) + \deg(S), \deg(Q) + \deg(R)) - (\deg(Q) + \deg(S)) \\
&= \max(\deg(P) - \deg(Q), \deg(R) - \deg(S)) \\
&= \max(\deg(F), \deg(G))
\end{aligned}$$

avec égalité lorsque les degrés sont différents par résultat sur les degrés de polynômes.

(ii) Procéder de façon similaire en développant les degrés.

□

c) Racines, pôles

Définition XV.2. Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle **irréductible**. On appelle :
- **racines** de F les racines de P sur $\mathbb{K}$;
- **pôles** de F les racines de Q sur $\mathbb{K}$.

La multiplicité d'une racine (resp. d'un pôle) de F est définie comme étant sa multiplicité en tant que racine de P (resp. de Q).

Notation. $\mathrm{Rac}_{\mathbb{K}}(F)$, $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}(F)$.

✖ **Attention :** l'irréductibilité est ici essentielle : 0 n'est pas un pôle (ni une racine) de $\dfrac{X(X+1)}{X}$.

➠ **Exemple XV.3.** Les pôles de $\dfrac{X}{X^2+1}$ sur $\mathbb{C}$ sont i et $-i$, et elle n'admet aucun pôle sur $\mathbb{R}$. Son unique racine sur les deux corps est 0.

✌ **Remarque XV.3.**
- Toute fraction rationnelle admet un nombre fini de pôles.
- Toute fraction rationnelle **non nulle** admet un nombre fini de racines.

— De façon analogue aux fonctions polynomiales, il est possible étant donné $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ de définir une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K} \setminus \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}(F) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}\,. \end{aligned}$$

2.⁻ Éléments simples

a) C'est quoi ?

Définition XV.3. On appelle **élément simple** sur $\mathbb{K}$ toute fraction rationnelle du type $\dfrac{P}{Q^n} \in \mathbb{K}(X)$ avec :
- — Q unitaire et irréductible sur $\mathbb{K}$;
- — $n \in \mathbb{N}^*$;
- — $\deg(P) < \deg(Q)$.

✌ **Remarque XV.4.** L'étude menée au chapitre XIV nous permet de classifier les éléments simples sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- — Sur $\mathbb{C}$, ce sont les fractions de la forme :

$$\frac{\alpha}{(X-\beta)^n}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$.
- — Sur $\mathbb{R}$ ce sont les fractions de la forme :

$$\frac{\alpha}{(X-\beta)^n}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ ainsi que celles de la forme :

$$\frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^n}$$

avec $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ tels que $p^2 - 4q > 0$.

b) Partie entière d'une fraction rationnelle

Proposition/définition XV.4. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $G \in \mathbb{K}(X)$ tel que :

(i) $\deg(G) < 0$;

(ii) $F = E + G$.

Le polynôme E est appelé **partie entière** de F.

Notation. $E(F)$

Démonstration. **Existence.** Posons $F = \dfrac{A}{B}$; alors par division euclidienne on a l'existence d'un couple $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ+R$ et $\deg(R) < \deg(B)$. Ainsi, $F = Q + \dfrac{R}{B}$ avec $\deg\left(\dfrac{R}{B}\right) < 0$.

Unicité. Si il existe deux couples (E,G) et (E',G') vérifiant les conditions voulues, alors $E_1 - E_2 = G_2 - G_1$ ce qui n'est possible (car $deg(G_1 - G_2) < 0$ et $E_1, E_2 \in \mathbb{K}[X]$) que si les deux différences sont nulles.

□

Exemple XV.4.

— $\dfrac{X+1}{X} = 1 + \dfrac{1}{X}$ donc $E\left(\dfrac{X+1}{X}\right) = 1$;

— $\dfrac{X}{X^2+1} = 0 + \dfrac{X}{X^2+1}$ donc $E\left(\dfrac{X}{X^2+1}\right) = 0$;

— Par division euclidienne, $2X^2+1 = (2X-2)(X+1)+3$ donc

$$E\left(\frac{2X^2+1}{X+1}\right) = 2(X-1)\,.$$

Remarque XV.5. $E(F) = 0$ si et seulement si $\deg(F) < 0$. De plus, si F est de degré positif, on a $\deg(F) = \deg(E(F))$.

c) Décomposition en éléments simples

◇ Le cas complexe

Théorème XV.4 (Décomposition en éléments simples (cas complexe))**.**
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ admettant n exactement n pôles $a_1, \dots, a_n$ de multiplicités respectives $k_1, \dots, k_n$. Alors il existe une unique famille $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{k_1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{k_n,n}$ de nombres complexes telle que :

$$F = E(F) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k_j} \frac{\alpha_{\ell,j}}{(X-a_j)^\ell}\,.$$

Démonstration. Admis. □

Et en pratique ? La première étape est dégager la partie entière, ce qui nous permet de partir du principe que notre fraction $F \in \mathbb{C}(X)$ est de degré strictement négatif.

Si les pôles sont simples : F est donc de la forme $\dfrac{A}{\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)}$ avec $A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

On fixe alors $j_0 \in [\![1,n]\!]$ et on remarque que $G = (X-a_{j_0})F$ n'a plus de pôle en a_{j_0}

et

$$G(a_{j_0}) = \frac{A(a_{j_0})}{\prod\limits_{j \neq j_0} (X - a_j)} .$$

Par unicité dans la DES, on obtient que si

$$F = \sum_{j=0} \frac{\alpha_j}{(X - a_j)}$$

alors

$$\alpha_{jj_0} = \frac{A(a_{j_0})}{\prod\limits_{j \neq j_0} (X - a_j)} .$$

Cette formule étant au programme, il est admissible de l'utiliser directement.

➠ **Exemple XV.5.** La DES de $\dfrac{X}{(X-1)(X-2)}$ est

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)} = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-2} ,$$

avec $\lambda = -1$ et $\mu = 2$.

Dans le cas général : on utilise les dérivées successives de la fraction rationnelle pour déterminer les coefficients du DES.

➠ **Exemple XV.6.** Considèrons la fraction rationnelle

$$F = \frac{X}{(X-1)(X-2)^2} .$$

Cette fraction est de degré -2 avec un pôle simple et un pôle double. Sa DES doit donc être de la forme :

$$F = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-2} + \frac{\nu}{(X-2)^2} .$$

Usant de la méthode vue *supra* relativement aux pôles simples, on trouve que $\lambda = 1$. Ensuite, en multipliant l'expression ci–dessus par $(X-2)^2$ et évaluant en "$X = 2$", on trouve :

$$\frac{2}{(2-1)} = \nu$$

et donc $\nu = 2$. Pour obtenir μ, on dérive l'expression ci dessus, puis on évalue en "$X = 2$", ce qui donne $\mu = -1$.

◇ **Le cas réel**

Théorème XV.5 (Décomposition en éléments simples (cas réel))**.**
Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction irréductible et soit

$$Q = \prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{\alpha_i}\prod_{i=1}^{m}(X^2+p_iX+q_i)^{\beta_i}$$

la décomposition en produit de facteurs irréductibles de Q sur $\mathbb{R}$, avec :
— les $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}^*$;
— les $a_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$ vérifiant $p_i^2 - 4q_i < 0$.
Alors il existe une unique famille de réels $\lambda_{i,j}, \mu_{i,j}$ et $\nu_{i,j}$ telle que :

$$F = E(F) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\beta_i}\frac{\mu_{i,j}X+\nu_{i,j}}{(X^2+p_iX+q_i)^j}\ .$$

Démonstration. Admis. □

En pratique, il est souvent efficace de décomposer en éléments sur simples sur $\mathbb{C}$ puis de regrouper les pôles conjugués. On peut aussi, se ramener à un système linéaire, comme illustré *infra.*

➠ **Exemple XV.7.** Pour déterminer la DES de $F = \dfrac{1}{X^3-1} = \dfrac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}$, on part du théorème qui nous dit que cette dernière sera de la forme :

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu X + \nu}{X^2+X+1}\ .$$

Usant de la méthode usuelle, on trouve $\lambda = \dfrac{1}{3}$. De plus, on pose :

$$G = (X^2+X+1)F = \frac{1}{X-1} = \lambda\frac{X^2+X+1}{X-1} + \mu X + \nu$$

et on a, en évaluant G en 0 et 2 :

$$\begin{cases} -1 = -\lambda + \nu \\ 1 = 7\lambda + 2\mu + \nu \end{cases},$$

ce qui donne $\mu = -\dfrac{1}{3}$ et $\nu = -\dfrac{2}{3}$.

d) Dérivée logarithmique

Terminons ce chapitre par un exemple fondamental et fort utile. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non constant, alors il peut s'écrire (sur $\mathbb{C}$) sous la forme :

$$P = c\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{k_i}\ ,$$

avec $c \in \mathbb{K}$, les $a_i \in \mathbb{C}$ et les $k_i \in \mathbb{N}^*$. De fait, si nous étions complètement malades, nous pourrions écrire la formule suivante :

$$\ln(P) = \ln(c) + \sum_{i=1}^{n} k_i \ln(X - a_i)$$

et "donc", en "dérivant" :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{X - a_i}.$$

Évidemment, on peut démontrer (et on doit savoir le faire !) cette formule proprement en utilisant les méthodes de calcul de DES vues précédemment, mais cette recette de cuisine impie a l'avantage de rester en mémoire.

Exemple XV.8.
— $\dfrac{X}{X^2+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X-i} - \dfrac{1}{X+i}\right)$;
— $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$ pour $n \geq 1$.

Addendum : calcul de primitives

Les résultats vus dans ce chapitre nous permettent de calculer efficacement les primitives de fonctions rationnelles ; il nous suffit en effet de savoir le faire pour les éléments simples. Bien que les résultats de ce paragraphe soient *stricto sensu* hors programme, ils pourront être utile au lecteur avide d'approfondissement calculatoire et fournissent des techniques fort utiles au demeurant.

◇ Éléments simples de première espèce

On entend par la les éléments simples de la forme

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n}$$

avec $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{C}$.

Cas 1 : $n \geq 2$. Une primitive de f est aisée à trouver :

$$F : x \mapsto \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}.$$

Cas 2 : $n = 1$. Si $a \in \mathbb{R}$, une primitive de f est $F : x \mapsto \ln(|x-a|)$. Sinon, posons $a = p + iq$ et remarquons que, pour tout x raisonnable :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-p) - iq} \\ &= \frac{(x-p) + iq}{(x-p)^2 + q^2} \end{aligned}$$

et donc une primitive de f est donnée par

$$F : x \mapsto \frac{1}{2}\ln((x-p)^2 + q^2) + i \arctan\left(\frac{x-p}{q}\right).$$

◇ Éléments simples de deuxième espèce

On entend par la les éléments simples de la forme

$$f : x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + px + q}$$

avec $\alpha, \beta, p, q \in \mathbb{R}$ et $p^2 - 4q < 0$. En posant, pour $x \in \mathbb{R}$, $t = x + \frac{p}{2}$, on obtient que $f(x) = g(t)$, où g est de la forme :

$$g : t \mapsto \frac{ut + v}{t^2 + a^2}$$

avec $u, v, a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. En effet :

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= \left(t - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(t - \frac{p}{2}\right) + q \\ &= t^2 - pt + \frac{p^2}{4} + pt - \frac{p^2}{2} + q \\ &= t^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} \end{aligned}$$

et donc $a = \sqrt{-\frac{p^2 - 4q}{4}}$ est bien défini et non nul car $p^2 - 4q < 0$. Une primitive de g est donc donnée par :

$$G : t \mapsto \frac{u}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{v}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) .$$

◇ Éléments simples de deuxième espèce, mais en différent

Le dernier type d'éléments simples dont nous avons besoin de déterminer une primitive est celui représenté (modulo translation similaire à ce qui a été fait dans le paragraphe *supra* par les deux intégrales suivantes (pour x réel) :

$$I_n = \int_0^x \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^x \frac{1}{(t^2 + a^2)^n} \,\mathrm{d}t$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \geq 2$. Remarquons dans un premier temps que, par forme composée usuelle :

$$I_n = \frac{-1}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}}$$

et tentons de calculer J_n par IPP, appliquée aux fonctions $t :\mapsto t$ et $t \mapsto (t^2 + a^2)^{-n}$, de classes $\mathscr{C}^1$. On a alors :

$$\begin{aligned} J_n =& x(x^2 + a^2)^{-n} - n \int_0^x t \frac{-2t}{(t^2 + a^2)^{n+1}} \,\mathrm{d}t \\ &= x(x^2 + a^2)^{-n} + n \int_0^x \frac{2t^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} \,\mathrm{d}t \,. \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0, x]$:

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} &= \frac{t^2 + a^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} - \frac{a^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(t^2 + a^2)^n} - \frac{a^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

et donc

$$J_n = x(x^2+a^2)^{-n} + 2nJ_n - 2a^2nJ_{n+1}$$

i.e

$$J_{n+1} = \frac{x(x^2+a^2)^{-n} + (2n-1)J_n}{2a^2n}$$

ce qui permet un calcul itératif de J_n.