Chapitre XIII

Équations différentielles

On fixe dans ce paragraphe un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

1.⁻ Primitives

a) C'est quoi ?

Définition XIII.1. Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Une **primitive** de f est une application $F : I \to \mathbb{K}$ telle que :
- $F \in \mathscr{D}^1(I)$;
- $F' = f$.

➠ **Exemple XIII.1.** Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Alors la fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^\alpha$$

admet pour primitive $F : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

✌ **Remarque XIII.1.** Toute fonction n'admet pas de primitive : on vérifie rapidement par l'absurde qu'il n'existe aucune fonction f dérivable au voisinage de 0 telle que $f' = \mathbb{1}_{\{0\}}$.

Le résultat qui suit devra pour l'instant être admis. Nous le démontrerons au chapitre XX.

Théorème XIII.1.
Soit $f \in \mathscr{C}^0(I)$. Alors :
- f admet une infinité de primitives ;
- si F et $\hat{F}$ sont deux primitives de f, la fonction $F - \hat{F}$ est constante.

Notation.

— Soit $f \in \mathscr{C}^0(I)$ et soit F une primitive de f. SI $a, b \in I$ on appellera **intégrale de f entre a et b** la quantité :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := F(b) - F(a)\ .$$
Il est aisé de vérifier que cette dernière ne dépend pas du choix de la primitive F. De plus, la dérivation étant linéaire, l'intégrale l'est naturellement.

— On pourra également noter $x \mapsto \int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ une primitive générique d'une fonction $f \in \mathscr{C}^0(I)$ lorsqu'il ne sera pas pertinent de déterminer la constante d'intégration.

Remarque XIII.2.

— Il découle de la "définition" donnée *supra* de l'intégrale que, pour tous $a, x \in I$:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\ .$$

— Similairement, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ on a, pour tous $a, x \in I$:
$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)\,.$$

◇ Primitives usuelles

Il suffit de lire "à l'envers" le tableau des dérivées usuelles pour obtenir ceci. Nous verrons plus tard comment obtenir les primitives "moins évidentes" des fonctions usuelles omises *infra*.

Valeur de $f(x)$	Ensemble de continuité	Valeur d'une primitive
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$
e^{ax} $(a \in \mathbb{C}^*)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\mathbb{R}$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$\arccos(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$

Remarque XIII.3. Le fait de savoir déterminer une primitive de $x \mapsto e^{ax}$ pour $a \in \mathbb{C}^*$ permet de faire de même pour les fonctions du type $x \mapsto e^{ux}\cos(vx)$ et $x \mapsto e^{ux}\sin(vx)$.

b) Outils calculatoires

◇ Reconnaître une forme composée usuelle

Cette méthode est transparente : si on reconnaît la dérivée d'une composée, c'est gagné. Par exemple, la primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$ et celle de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $\ln\circ\ln$. Même chose pour déterminer une primitive de tan et th.

✍ **Exercice XIII.1.** Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = \sqrt{y(x)}$.

➥ **Correction :** *On procède par analyse–synthèse : si y est une telle fonction, elle ne s'annule pas et donc on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{y'(x)}{\sqrt{x}} = 1\,.$$

Ceci entraîne que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{y(x)} = \frac{1}{2}$$

et donc il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{y(x)} = \frac{x}{2} + c, \quad i.e \quad y(x) = \left(\frac{x}{2} + c\right)^2\,.$$

On vérifie ensuite aisément que ces fonctions sont bien solutions de l'équation initiale.

◇ Intégration par parties (IPP)

Proposition XIII.2. Soient f et g deux fonctions **de classe** $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors, pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

avec

$$[f(t)g(t)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(b)\,.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que la fonction fg est une primitive de $(fg)'$; on a donc :

$$\begin{aligned}[f(t)g(t)]_a^b &= \int_a^b (fg)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

✖ **Attention :** il est absolument **essentiel** de bien préciser le caractère $\mathscr{C}^1$ de f et g lorsque l'on fait une IPP.

Cette proposition est extrêmement utile pour calculer les primitives de produits dont l'un des termes est peu sensible à la dérivation et/ou contenant un terme polynomiale (qui disparaîtra après un certain nombre de dérivées). En particulier, toutes les constructions de la forme "polynôme × exponentielle" et "polynôme × cosinus ou sinus" devront être traitées de la sorte.

✍ **Exercice XIII.2.** Soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$I_n(x) := \int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

➥ **Correction :** *Les fonctions $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto -e^{-t}$ (primitive de $t \mapsto e^{-t}$) étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, x]$, nous pouvons procéder par IPP (proposition XIII.2) :*

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \left[t^n(-e^{-t})\right]_0^x - \int_0^x nt^{n-1}(-e^{-t})\,\mathrm{d}t \\ &= -x^n e^{-x} + nI_{n-1}(x)\,. \end{aligned}$$

Ceci constitue une relation de récurrence ; il est ensuite aisé de démontrer que :

$$\begin{aligned} & I_n(x) - x^n e^{-x} + nI_{n-1}(x) \\ &\quad = -x^n e^{-x} + n(-x^{n-1}e^{-x} + (n-1)I_{n-2}(x)) \\ &\quad \vdots \\ &\quad = -x^n e^{-x} - \sum_{k=2}^{n} n \times \ldots \times k\, x^{k-1}e^{-x} + n!I_0(x) \\ &\quad = --x^n e^{-x} - \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-1)!}\, x^{k-1}e^{-x} + n!(1-e^{-x}) \\ &\quad = -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{n!}{(k-1)!}\, x^{k-1}e^{-x} + n!(1-e^{-x}) \end{aligned}$$

◇ Changement de variable

Théorème XIII.3.
Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(I)$ et soit $f \in \mathscr{C}^0(\varphi(I))$. Alors, pour tous $a, b \in I$ on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $\varphi(I)$ (une telle fonction existe par continuité, *cf.* théorème XIII.1). Alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b F' \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [F \circ \varphi]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

□

Cette technique de calcul peut paraître un peu déroutante au début ; il est possible de la visualiser "à la physicienne" de la façon suivante : si $x = \varphi(t)$ alors :

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(\varphi(t))\,\mathrm{d}(\varphi(t))\\ &= \int_a^b f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

➠ **Exemple XIII.2.**

— Calculons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

par changement de variable. Pour ce faire, nous posons $\varphi : t \mapsto \ln(t)$; cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, e]$ d'image $[0, 1]$ (nous cherchons donc à "poser $x = \ln(t)$"). On a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^e \frac{t}{1+t^2}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \int_1^e \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \arctan(e) - \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

— De la même façon, on peut calculer (pour $u \in [-1, 1]$)

$$\int_0^u \arccos(x)\,\mathrm{d}x$$

en posant $\varphi : t \mapsto \cos(t)$. On obtient :

$$\int_0^u \arccos(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(u)} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

que nous pouvons ensuite calculer par IPP en remarquant que $t \mapsto t$ et $\cos(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur notre intervalle, *i.e*

$$\begin{aligned}\int_0^u \arccos(x)\,\mathrm{d}x &= -\left[-t\cos(t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(u)} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(u)} (-\cos(t))\,\mathrm{d}t\\ &= u\arccos(u) + \int_{\arccos(u)}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t\\ &= u\arccos(u) + 1 - \sin(\arccos(u))\\ &= u\arccos(u) + 1 - \sqrt{1-u^2}\,.\end{aligned}$$

◇ Primitives des inverses de trinômes du second degré

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer les primitives des fonctions de la forme

$$f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Cas 1 : $a \neq 0$**.** Posons alors $\Delta = b^2 - 4ac$ et distinguons deux sous–cas.

Cas 1.1 : $\Delta \neq 0$**.** Alors il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ tels que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$. Cherchons à déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\},\ f(x) = \frac{\lambda}{x - r_1} + \frac{\mu}{x - r_2}\ .$$

Pour ce faire, nous multiplions cette égalité par $x - r_1$:

$$f(x)(x - r_1) = \lambda + \mu \frac{x - r_1}{x_2}$$

puis évaluons en $x = r_1$, ce qui nous donne

$$\lambda = \frac{1}{a(r_1 - r_2)}\ .$$

En procédant de même pour μ, nous obtenons que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\},\ f(x) = \frac{1}{a(r_1 - r_2)} \left(\frac{1}{x - r_1} - \frac{1}{x - r_2} \right)$$

et donc admet pour primitive, si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{1}{a(r_1 - r_2)} (\ln(|x - r_1|) - \ln(|x - r_2|))\ . \end{aligned}$$

Si les racines sont complexes, il suffit de remarquer que, pour tout x raisonnable et $p, q \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - (p + iq)} &= \frac{1}{(x - p) - iq} \\ &= \frac{(x - p) + iq}{(x - p)^2 + q^2} \end{aligned}$$

et donc cette quantité admet pour primitive

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln((x - p)^2 + q^2) + i \arctan \left(\frac{x - p}{q} \right)\ .$$

Cas 1.2 : $\Delta = 0$**.** Dans ce cas, il existe $r \in \mathbb{C}$ tel que f soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{a(x - r)^2}$$

de primitive

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \setminus \{r\} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto -\frac{1}{a(x - r)}\ . \end{aligned}$$

Cas 2 : $a = 0$. Si $b = 0$, c'est trivial. Sinon, on a pour tout $x \neq \frac{-c}{b}$:

$$f(x) = \frac{1}{b} \frac{b}{bx + c}$$

et donc f admet pour primitive, si $b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{c}{b}\right\} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{1}{b} \ln(|bx + c|) \, . \end{aligned}$$

Notons que si $-\frac{c}{b} \notin \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{c}{b}\right\} = \mathbb{R}$. Dans le cas où b ou c n'est pas réel, on obtient en suivant la même méthode que dans le cas 2.1 une primitive combinaison linéaire d'un logarithme et d'une arc tangente.

2.⁻ Équations différentielles linéaires du premier ordre

a) C'est quoi ?

Définition XIII.2. Soient $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$; on appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 1 l'équation

$$y' + ay = b \qquad (\mathscr{E})$$

d'inconnue $y \in \mathscr{D}^1(I, \mathbb{K})$. L'**équation homogène associée** à $(\mathscr{E})$ est alors :

$$y' + ay = 0 \qquad (\mathscr{H}) \, .$$

Vocabulaire. La fonction a est appelée **coefficient** de l'équation, la fonction b est quand à elle dénommée **second membre** de celle–ci.

✌ **Remarque XIII.4.**

— **Résoudre** une équation différentielle linéaire d'ordre 1 revient à déterminer l'ensemble

$$\mathrm{Sol}_{\mathscr{E}} = \{y \in \mathscr{D}^1(I) \mid y' + ay = b\}$$

et similairement pour l'équation homogène associée.

— Si $y \in \mathrm{Sol}_{\mathscr{E}}$, alors comme $y' = -ay + b$, y est automatiquement de classe $\mathscr{C}^1$.

Convention. Nous avons longuement évoqué le fait qu'il était déraisonnable d'écrire des choses du genre $y' + x^2 y = e^x$. C'est cependant la norme dans l'étude des équations différentielles. Ne vous posez pas trop de questions …

➠ **Exemple XIII.3.** $y' + 13y = e^{-x^2+18}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 .

b) Résolution

Proposition XIII.4. Soit $(\mathscr{E})$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 d'équation homogène $(\mathscr{H})$ et soit $y_0 \in \mathrm{Sol}_{\mathscr{E}}$. Alors :

$$\mathrm{Sol}_{\mathscr{E}} = \{y_0 + y \,|\, y \in \mathrm{Sol}_{\mathscr{H}}\} .$$

Démonstration.

$(\supset)$ Immédiat, il suffit de réinjecter dans $(\mathscr{E})$.

$(\subset)$ Soit y une solution de $(\mathscr{E})$; alors on vérifie aisément en réinjectant que $y - y_0 \in \mathrm{Sol}_{\mathscr{H}}$.

□

Cela signifie que la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 devra nécessairement se faire en trois temps :

1. résoudre l'équation homogène associée ;
2. déterminer une solution particulière y_0 de l'équation ;
3. combiner ces deux données via la proposition précédente.

◇ Résolution homogène

Proposition XIII.5. Soit $a \in \mathscr{C}^0(I)$; on considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène

$$y' + ay = 0 \qquad (\mathscr{H}) .$$

Alors, si A est une primitive de a :

$$\mathrm{Sol}_{\mathscr{H}} = \{x \mapsto Ce^{-A(x)} \,|\, C \in \mathbb{K}\} .$$

Démonstration.

$(\supset)$ Si y est de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$, on vérifie rapidement que $y' = -ay$.

$(\subset)$ Soit $y \in \mathrm{Sol}_{\mathscr{H}}$; alors, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)e^{A(x)}\right) &= y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} \\ &= \left(y'(x) + a(x)y(x)\right)e^{A(x)} \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc la fonction $x \mapsto y(x)e^{A(x)}$ est constante car de dérivée nulle sur l'intervalle I. Ceci entraîne le résultat.

□

✌ **Remarque XIII.5.** Si a est une fonction constante égale à $\kappa \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\mathrm{Sol}_{\mathscr{H}} = \{x \mapsto Ce^{-\kappa x} \,|\, C \in \mathbb{K}\} .$$

➠ **Exemple XIII.4.** Résolvons l'équation

$$y' + \frac{3}{x}y = 0 \qquad (\mathscr{H})$$

sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène de coefficient $a : x \mapsto \frac{3}{x}$ continu sur $\mathbb{R}_+^*$ et de primitive $x \mapsto \ln(x^3)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sol}_{\mathscr{H}} &= \left\{ x \mapsto Ce^{-\ln(x^3)} \,\middle|\, C \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ x \mapsto \frac{C}{x^3} \,\middle|\, C \in \mathbb{C} \right\} .\end{aligned}$$

◇ **Recherche d'une solution particulière**

La seconde étape du procédé de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est un tantinet moins codifiée et repose parfois sur des techniques *ad–hoc*. Nous donnons ici quelques méthodes utilisables, à compléter en TD.

Recherche d'une solution évidente. Cela arrive, parfois. Par exemple, une solution particulière de $y' + 3y = 7$ est $x \mapsto \dfrac{7}{3}$ et une solution de $y' + xy = x$ est $x \mapsto 1$. De façon générale, toujours vérifier si il existe des solutions constantes à notre équation...

Nous verrons en TD que l'on peut appliquer des méthodes de ce type de façon heuristique si a est constante et que b est d'une certaine forme.

Méthode de variation de la constante. L'idée de cette méthode est relativement simple : on remplace le "C" dans l'expression des solutions homogène par une fonction, faisant ainsi "varier la constante". Plus rigoureusement, on recherche une solution particulière sous la forme

$$y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$$

où A est une primitive du coefficient a de notre équation et $\lambda \in \mathscr{C}^1(I)$. On a alors, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}y_0'(x) + a(x)y_0(x) &= \lambda'(x)e^{-A(x)} - a(x)y_0(x) + a(x)y_0(x) \\ &= \lambda'(x)e^{-A(x)}\end{aligned}$$

et donc, si b est le second membre de l'équation :

$$\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)} .$$

Nous sommes donc en capacité de déterminer une solution particulière de l'équation à condition de savoir "primitiver" la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ (ce qui n'est pas automatique !).

✖ **Attention :** ne pas oublier de multiplier λ par la solution homogène à la fin du procédé !

Exemple XIII.5. En recherchant une solution particulière de

$$y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{(E :XIII.1)}$$

sous la forme $y_0 : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, on tombe sur $\lambda' = 1$ et donc $y_0 : x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}$ convient.

Exercice XIII.3. Résoudre l'équation :

$$(x+1)y' - xy + 1 = 0 \qquad \text{(E :XIII.2)}$$

sur $I =]-1, \infty[$.

Correction : *Il faut commencer par mettre cette équation sous forme normale :*

$$y' - \frac{x}{x+1}y = -\frac{1}{x+1} \qquad \text{(E :XIII.3)}$$

et d'appliquer les méthodes vu précédemment ; on peut alors reconnaître une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient et second membre continus sur I. Pour trouver une primitive du coefficient, on remarque que :

$$\forall x \in I, \ \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

et donc $x \mapsto x - \ln(x+1)$ convient. Les solutions homogènes sont donc les

$$x \mapsto C\frac{e^x}{x+1}$$

*pour $C \in \mathbb{C}$. La méthode de variation de la constante livre ensuite l'équation différentielle $\lambda' = -e^{-x}$ et donc les solutions de (**E** :XIII.2) sont les*

$$x \mapsto \frac{1}{x+1} + C\frac{e^x}{x+1}$$

pour $C \in \mathbb{C}$.

Notons que ces techniques permettent, via changement de fonction inconnue, de résoudre certaines équations différentielles non linéaires, telles les équations de Riccati (Jacopo, 1676—1754, mathématicien et juriste vénitien) *infra*.

Exercice XIII.4. Soient $a, b \in \mathscr{C}^0(I)$. On considère l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}_+^*)$:

$$z' = a + bz + z^2 . \qquad \text{(E :XIII.4)}$$

1. Supposons connue une solution particulière z_0 de (**E** :XIII.4).
   (a) Vérifier que (**E** :XIII.4) est équivalente à une équation du type :
   $$w' = cw + w^2 , \quad \text{avec } c \in \mathscr{C}^0(I) . \qquad \text{(E :XIII.5)}$$
   (b) Démontrer que (**E** :XIII.5) est équivalente à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on précisera.
2. Résoudre les équations de Riccati suivantes sur des intervalles pertinents :
   (a) $(x^2+1)z' = z^2 - 1$;

(b) $x^3z' + z^2 + zx^2 + 2x^4 = 0$;

(c) $(z' - z^2)\cos(x) + (2\cos^2(x) + \sin(x))z = \cos^3(x)$.

➥ **Correction :**

1. (a) *Soit $z \in \mathscr{C}^1(I)$; alors, en posant $w = z - z_0$, on a :*

$$w' = a + bz + z^2 - a - bz_0 - z_0^2 = bw + (z^2 - z_0^2)\,.$$

Or

$$\begin{aligned} z^2 - z_0^2 &= (z - z_0)(z + z_0) \\ &= w(w + 2z_0) \\ &= w^2 + 2z_0 w \end{aligned}$$

ergo :

$$w' = (b + 2z_0)w + w^2\,.$$

(b) *Pour tout $w \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}_+^*)$, on peut poser $y = \frac{1}{w}$ et remarquer que w est solution de **E** :XIII.5 si et seulement si :*

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-w'}{w^2} \\ &= -\frac{cw + w^2}{w^2} \\ &= -cy + 1\,. \end{aligned}$$

2. *Il suffit de remarquer que* 1, $x \mapsto -x^2$ *et* $\cos$ *sont solutions particulières et d'appliquer la méthode supra.*

Principe de superposition. Notons au passage que si le second membre b d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est de la forme $b = \sum_{i=1}^{n} b_i$, la linéarité de l'équation entraîne qu'il suffit de déterminer une solution particulière associée à chaque b_i et des les sommer.

c) Problèmes de Cauchy

Définition XIII.3. Soient $a, b \in \mathscr{C}^0(I)$ et soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. On appelle **problème de Cauchy linéaire du premier ordre** associé à ces données le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $y \in \mathscr{D}^1(I)$.

Vocabulaire. Les données x_0 et y_0 sont appelées **conditions initiales du système**.

Exemple XIII.6.

$$\begin{cases} y' + 3y = \pi e^{-18x^9} \\ y(0) = 127\gamma + 2i \end{cases}$$

est un problème de Cauchy sur $I = \mathbb{R}$.

Théorème XIII.6 (Cauchy linéaire, ordre 1)**.**
Tout problème de Cauchy linéaire du premier ordre admet une unique solution.

Démonstration. Par variation de la constante, on sait qu'il existe une solution particulière y_p de l'équation différentielle sous–jacente. De fait, il existe une infinité de solutions de celle–ci, de la forme :

$$y : x \mapsto y_p(x) + Ce^{-A(x)}$$

avec $C \in \mathbb{K}$ et A une primitive de a. La constante C est alors déterminée par l'équation $y(x_0) = y_0$, qui entraîne que :

$$C = -y_p(x_0)e^{A(x_0)}$$

d'où le résultat. □

Exemple XIII.7. Si on rajoute à l'équation E :XIII.2 la condition initiale $y(0) = 1$, l'unique solution du problème de Cauchy est :

$$y : x \mapsto \frac{1}{x+1}.$$

3.– Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

a) C'est quoi ?

Définition XIII.4. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** associée à ces données l'équation

$$y'' + ay' + by = f \qquad (\mathscr{E})$$

d'inconnue $y \in \mathscr{D}^2(I, \mathbb{K})$. L'**équation homogène associée** est alors

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (\mathscr{H})$$

Vocabulaire. Les **constantes** a et b sont appelées **coefficients** de l'équation. La **fonction** f est appelée **second membre** de celle–ci.

Remarque XIII.6. De la même façon que pour les équation différentielle linéaire d'ordre 1 , une solution d'une telle équation sera automatiquement de classe $\mathscr{C}^2$.

Exemple XIII.8.
— $y'' + iy' + \cos(13 + \sqrt{2}\pi)y = x^2$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
— $y'' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont on connaît déjà deux solutions sur $\mathbb{R}$: cos et sin.

Définition XIII.5. Soit $y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants ; on appelle **équation caractéristique** associée l'équation polynomiale
$$X^2 + aX + b = 0 \qquad (\chi) .$$

Exemple XIII.9. L'équation caractéristique associée à $y''+y = 0$ est $X^2+1 = 0$.

b) Résolution

Proposition XIII.7. Soit $(\mathscr{E})$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation homogène $(\mathscr{H})$ et soit $y_0 \in \mathrm{Sol}_{\mathscr{E}}$. Alors :
$$\mathrm{Sol}_{\mathscr{E}} = \{y_0 + y \,|\, y \in \mathrm{Sol}_{\mathscr{H}}\} .$$

Ce résultat, analogue à celui vu pour le premier ordre, nous indique que la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants se fera selon les mêmes "temps" que celle d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

◇ Résolution homogène

Proposition XIII.8. On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants
$$y'' + ay' + bt = 0 \qquad (\mathscr{H})$$
dont l'équation caractéristique a pour discriminant $\Delta = a^2 - 4b$. Alors :
— si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ et :
$$\mathrm{Sol}_{\mathscr{H}} = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} ;$$
— si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une unique solution $r_0 \in \mathbb{C}$ et :
$$\mathrm{Sol}_{\mathscr{H}} = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0 x} \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} .$$

Démonstration. Dans les deux cas, l'inclusion de droite à gauche est triviale. Pour la réciproque, fixons $\phi \in \mathrm{Sol}_{\mathscr{H}}$ et α une racine de l'équation caractéristique $X^2+aX+b = 0$. Alors, en posant
$$g : x \mapsto \phi(x)e^{-\alpha x}$$

on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'' + a\phi' + b\phi \\ &= g'' + (2\alpha + a)g' + \underbrace{(\alpha^2 + a\alpha + b)}_{=0} g \end{aligned}$$

car pour tout $x \in I$, $\phi(x) = g(x)e^{\alpha x}$. Au final, on obtient donc

$$g'' + (2\alpha + a)g' = 0 \qquad (\mathbf{E}\ \text{:XIII.6})$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène en g'. En la resolvant, on obtient qu'il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = Ce^{-(2\alpha+a)x}\ .$$

Cas 1 : $\Delta \neq 0$**.** Soit β l'unique racine de l'équation caractéristique distincte de α ; nous savons que $\alpha + \beta = -a \neq 2\alpha$ donc $2\alpha + a \neq 0$. Nous pouvons donc intégrer sans crainte l'expression de g' *supra* et obtenir qu'il existe $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall x \in I,\ g(x) = Ae^{-(2\alpha+a)x} + B$$

et donc

$$\begin{aligned} \forall x \in I,\ \phi(x) &= g(x)e^{\alpha x} \\ &= Ae^{-(\alpha+a)x} + Be^{\alpha x} \\ &= Ae^{\beta x} + Be^{\alpha x} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Cas 2 : $\Delta = 0$**.**Dans ce cas, $2\alpha = -a$ car α est l'unique racine double de l'équation caractéristique, donc g' est constante. Il suffit alors d'intégrer et de multiplier par $x \mapsto e^{\alpha x}$ comme dans le cas précédent pour obtenir le résultat voulu.

□

✌ **Remarque XIII.7.**
— Notons que l'expression des solutions présente deux "degrés de liberté".
— Si Δ est un réel strictement négatif, les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées, *i.e* $r_1 = a + ib$ et $r_2 = a - ib$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. De fait, les solutions **réelles** de $(\mathscr{H})$ sont de la forme

$$x \mapsto e^{ax}(\alpha\cos(bx) + \beta\sin(bx))$$

pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

➠ **Exemple XIII.10.** Les solutions complexes de $y' + y = 0$ sont les

$$x \mapsto Ae^{ix} + Be^{-ix}$$

pour $A, B \in \mathbb{C}$. En passant à la partie réelle, on obtient que ses solutions réelles sont les

$$x \mapsto C\cos(x) + D\sin(x)$$

pour $C, D \in \mathbb{R}$.

◇ **Recherche d'une solution particulière**

Recherche d'une solution évidente. Comme à l'ordre 1, il convient de vérifier si notre équation n'admet pas de solution "immédiate". Par exemple, $x \mapsto \frac{e^x}{3}$ est solution de $y'' + y' + y = e^x$.

Cas particuliers. La méthode de variations des constantes est hors–programme. Nous donnons cependant quelques "recettes" pour traiter les cas le plus couramment rencontrés aux concours. Plus précisément, si le second membre de l'équation étudiée est de la forme

$$x \mapsto Ae^{\alpha x}$$

avec $A, \alpha \in \mathbb{C}$, il convient de rechercher une solution particulière sous la forme

$$x \mapsto P(x)e^{\alpha x}$$

avec :
- si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique, P constant ;
- si α est racine simple de l'équation caractéristique, P de degré 1 ;
- si α est racine double de l'équation caractéristique, P de degré 2.

Notons que cette méthode nous permet, via l'exponentielle complexe et un passage à la partie réelle ou imaginaire de résoudre les cas où le second membre est une fonction cos ou sin.

➠ **Exemple XIII.11.** Cette méthode permet de résoudre rapidement les équations

$$y'' + y = e^x \qquad (\mathbf{E}\ \text{:XIII.7})$$

et

$$y'' - y = e^x\ . \qquad (\mathbf{E}\ \text{:XIII.8})$$

Pour les solutions particulières, la première en admet une évidente ($x \mapsto \frac{e^x}{2}$) et la seconde admet $x \mapsto \frac{x}{2}e^x$, obtenue via la méthode *supra* (1 est racine simple de $X^2 - 1 = 0$).

✌ **Remarque XIII.8.** Le principe de superposition se généralise au second ordre.

c) Problèmes de Cauchy

Définition XIII.6. Soient $a, b \in \mathbb{K}$, $f \in \mathscr{C}^0(I)$ et soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. On appelle **problème de Cauchy linéaire du second ordre** associé à ces données le système :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

d'inconnue $y \in \mathscr{D}^2(I)$.

Vocabulaire. Les données x_0, y_0 et y_1 sont appelées **conditions initiales du système**.

➠ **Exemple XIII.12.**

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy sur $I = \mathbb{R}$.

Théorème XIII.9 (Cauchy linéaire, ordre 2)**.**
Tout problème de Cauchy linéaire du second ordre admet une unique solution.

➠ **Exemple XIII.13.** L'unique solution du problème de Cauchy de l'exemple précédent est :

$$y : x \mapsto \cos(x) \; .$$