Chapitre XII

Matrices, systèmes linéaires

On fixe dans tout ce chapitre un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.⁻ Généralités

a) C'est quoi ?

Définition XII.1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$; on appelle **matrice** à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{K}$ toute application

$$M : [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \to \mathbb{K}\,.$$

Notation. Du point de vue pratique, nous représenterons une matrice sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes, le coefficient en position (i, j) correspondant à la valeur de $M(i, j)$. Ceci donnera des objets ressemblant à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

les deux notations étant usitées aux concours.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes sera quant à lui noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on notera généralement $m_{i,j}$ son coefficient ligne i, colonne j.

Vocabulaire.

— Lorsque $n = p$, on parle de **matrices carrées** ; l'ensemble correspondant est simplement noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— On appelle **matrice diagonale** toute matrice **carrée** $M = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (i \neq j) \Rightarrow (m_{i,j} = 0)\,.$$

Une telle matrice est donc de la forme :

$$\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & d_n \end{pmatrix}$$

avec $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}$. L'ensemble de ces matrices sera noté $D_n(\mathbb{K})$.

— Une **matrice scalaire** est une matrice de la forme

$$\operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \lambda & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \ :,$$

Les plus célèbres étant la matrice nulle et la matrice identité, respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} .$$

— On appelle **matrice triangulaire supérieure** toute matrice **carrée** $M = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ (i > j) \Rightarrow (m_{i,j} = 0) .$$

Une telle matrice est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} \star & & (\star) \\ & \star & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \star \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est noté $T_n^+(\mathbb{K})$. On définit de la même façon l'ensemble $T_n^-(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures ; on a alors naturellement :

$$T_n^+(\mathbb{K}) \cap T_n^-(\mathbb{K}) = D_n(\mathbb{K}) .$$

b) Combinaisons linéaires

Il est aisé de définir deux lois de compositions sur les matrices ; en l'occurrence :

— la somme de deux matrices $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie comme étant la matrice $A + B = (c_{i,j})_{i,j}$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} .$$

Ceci définit une loi de composition interne commutative sur $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$;

— si $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit la matrice $\lambda M = (a_{i,j})_{i,j}$ *via*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad a_{i,j} = \lambda m_{i,j} .$$

Ceci définit une loi de composition dite **externe** sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (*cf.* chapitre XVIII).

Proposition XII.1. Le couple $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien. Dans le cas où $n = p$, les ensembles $D_n(\mathbb{K})$, $T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ en sont des sous–groupes.

◇ **Matrices élémentaires**

Posons, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \ ,$$

où $\delta_{i,j}$ est, pour tous objects i, j, le **symbole de Kronecker** valant 0 si $i \neq j$ et 1 sinon. Ceci signifie que tous les coefficients de la matrice $E_{i,j}$ sont nuls, à l'exception de celui situé ligne i, colonne j, qui est égal à 1 ; *e.g* pour $n = p = 2$ nous avons :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On a alors naturellement que, si $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j} \ .$$

On dit que la matrice A est **combinaison linéaire** de matrices élémentaires.

c) Produit matriciel

Définition XII.2. Soient $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On appelle **produit** de A par B la matrice, notée $A \times B \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient en position (i,j), pour $i \in [\![1,r]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, est :

$$\sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j} \ .$$

✖ **Attention :** il ne nous est possible de former le produit de deux matrices A et B que si leurs dimensions sont **compatibles** : il est nécessaire que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

➠ **Exemple XII.1.**

—

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

— Soient $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,q]\!]$ et $(k,\ell) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$. Alors il est possible de former le produit $E_{i,j} \times E_{k,\ell} \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ et cette matrice admet pour coefficient en position $(a,b) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$\sum_{c=1}^{q} \delta_{i,a}\delta_{j,c}\delta_{c,k}\delta_{\ell,b} = \delta_{i,a}\delta_{\ell,b} \sum_{c=1}^{q} \delta_{j,c}\delta_{c,k} \ .$$

La somme de droite *supra* est non nulle à la seule condition que $j = k$, et égale à 1 dans ce cas, entraînant que :

$$\sum_{c=1}^{q} \delta_{i,a}\delta_{j,c}\delta_{c,k}\delta_{\ell,b} = \delta_{i,a}\delta_{\ell,b}\delta_{j,k}$$

le produit des deux symboles de Kronecker de gauche étant reconnaissable (si, si) comme le coefficient en position (a, b) de la matrice $E_{i,\ell}$. On en déduit donc que :

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell} \ .$$

Remarque XII.1.

— Le lecteur fou à lier s'empressera alors de vérifier dans la doubleur que le produit matriciel est **associatif** et **bilinéaire** ($i.e$ si A, B, C sont des matrices raisonnables et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(A+\lambda B)C = AC+\lambda BC$. Il est cependant, lorsque les matrices sont carrées, **non commutatif** (*cf.* paragraphe 2.$^-$)

— Le produit de deux matrices triangulaires (resp. diagonales, scalaires) reste triangulaire de même "orientation" (resp. diagonal, scalaire).

— Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, la matrice AX est combinaison linéaire des colonnes de A.

⋄ Produit par blocs

Pour manipuler des matrices de tailles plus ou moins déraisonnables, nous pourrons avoir recours à l'écriture "par blocs", $i.e$ nous poserons des matrices sous la forme :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

avec A, B, C, D des matrices de tailles compatibles. Il nous sera possible d'utiliser les opérations classiques sur les matrices directement sur les blocs, pour peu que ceux–ci soient raisonnables ($i.e$ que les dites opérations soient légales).

Exemple XII.2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; alors on peut écrire M sous la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = (5)$. De fait :

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A^2+BC & AB+BD \\ \hline CA+DC & CB+D^2 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A^2 & 0 \\ \hline 0 & D^2 \end{array}\right) \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 0 \\ 15 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} .$$

d) Transposition

Définition XII.3. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont le coefficient en position $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$ est $a_{j,i}$.

Notation. $A^\top$.

Exemple XII.3.

—
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} ;$$

—
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 42 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 42 \end{pmatrix} .$$

Proposition XII.2. Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(i) $(A + \lambda B)^\top = A^\top + \lambda B^\top$;

(ii) $(A^\top)^\top = A$;

(iii) si $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AC)^\top = C^\top A^\top$.

Démonstration. Les points (i) et (ii) sont triviaux. Pour le point (iii), fixons $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$; alors le coefficient en position (i,j) de $C^\top A^\top$ est

$$\sum_{k=0}^{p} c_{k,i} a_{j,k} .$$

Il s'agit donc bien du coefficient situé ligne j, colonne i de la matrice AC, d'où le résultat. □

Exercice XII.1. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Exprimer de façon simple la quantité $X^\top X$.

➥ **Correction :** *Posons* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. *Alors* $X^\top X \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ *aura pour seul coefficient la quantité :*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 .$$

Définition XII.4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **carrée**. On dira que A est :
- — **symétrique** si $A = A^\top$;
- — **antisymétrique** si $A = -A^\top$.

Notation. On notera $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques.

➠ **Exemple XII.4.** Les matrices diagonales sont symétriques. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

✌ **Remarque XII.2.**
- Une matrice A est symétrique si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on a $a_{i,j} = a_{j,i}$. De même, une telle matrice sera antisymétrique à condition d'avoir $a_{i,j} = -a_{j,i}$; en particulier, $a_{i,i} = -a_{i,i}$. La diagonale d'une matrice antisymétrique est donc toujours nulle.
- Toute combinaison linéaire de matrices symétriques (resp. anitsymétriques) reste symétrique (resp. antisymétrique).
- On a, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$M = \underbrace{\frac{M + M^\top}{2}}_{\in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{M - M^\top}{2}}_{\in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})},$$

cette décomposition étant unique (pourquoi ?).

2.⁻ L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

a) Qui est-ce ?

Proposition XII.3. Soit $n \geq 0$. Alors $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

Démonstration. Il s'agit d'une synthèse des propriétés évoquées précédemment dans ce chapitre. Notons que le neutre pour le produit matriciel dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice identité I_n. □

✖ **Attention :** cet anneau n'est évidemment **pas** commutatif dés que $n \geq 2$: en effet

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◇ Abominations diverses

L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un endroit particulièrement bien famé ; on y trouve divers objets inconnus dans des contrées civilisées, dont nous donnons quelques exemples ci–ensuite, de façon à encourager notre lecteur à une saine paranoïa en matière de calcul matriciel.

Diviseurs de zéro. La nullité d'un produit matriciel n'entraîne absolument pas celle de l'un des facteurs ; par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est donc PAS intègre (sauf si $n = 1$).

Nilpotents. Pire, certaines matrices non nulles ont la discourtoisie d'admettre une puissance nulle ; par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Compte tenu de ces exemples, il serait réellement de mauvais ton de considérer le produit matriciel comme intègre. À bon entendeur ...

◇ Binôme de Newton

Notons, en contraste avec le musée des horreurs *supra*, que si deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont telles que $AB = BA$ (on dit qu'elles **commutent**), nous disposons de la formule du binôme de Newton (proposition VIII.13), pour $p \in \mathbb{N}$:

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} .$$

✍ **Exercice XII.2.** Calculer les puissances successives de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

➥ **Correction :** *Remarquons que $A = D + N$ avec*

$$D = 3I_3 \quad \textit{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

ces deux matrices commutant. De plus, pour tout $k \geq 2$, on a $N^k = 0$, ce qui entraîne que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^p &= (D + N)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k D^{p-k} \\ &= N^0 D^p + pND^{p-1} \\ &= 3^p I_3 + p3^{p-1} N \\ &= \begin{pmatrix} 3^p & 0 & p3^{p-1} \\ 0 & 3^p & 0 \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Groupe linéaire

Définition XII.5. Le groupes des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est appelé **groupe linéaire** d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

Notation. $GL_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^\times$.

✖ **Attention :** seules les matrices **carrées** peuvent être inversibles. De plus, en raison du caractère non commutatif de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il convient de ne pas oublier que (*cf.* chapitre VIII) :

$$\forall A, B \in GL_n(\mathbb{K}), \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} .$$

➠ **Exemple XII.5.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; alors on peut vérifier que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. On a alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

✌ **Remarque XII.3.** Nous verrons dans le paragraphe 3.⁻ une méthode de calcul pratique de l'inverse d'une matrice carrée inversible.

Proposition XII.4. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $A^\top \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$

Démonstration. Il s'agit d'un corollaire de la proposition XII.2. □

3.⁻ Systèmes linéaires

a) Définition

Définition XII.6. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On appelle **système linéaire** à p équations et q inconnues toute famille d'équations de la forme :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} x_j = b_i$$

avec les $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{K}$ fixés et les x_i inconnus scalaires.

✌ **Remarque XII.4.** Un tel système est équivalent à une **équation matricielle** du type

$$AX = B$$

avec $A=(a_{i,j})_{i,j}\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_q\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_p\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
Dans ce cas, A est appelée **matrice du système**, B son **second membre** et X son **inconnue**.

Exemple XII.6. Le système linéaire

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= 1\\ x-y &= 42\end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 42\end{pmatrix}}_{B}.$$

Définition XII.7. On considère un système linéaire $AX=B$. Alors :
— on dira que le système est **compatible** si il admet au moins une solution $X\in\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K})$;
— le système sera dit **homogène** si $B=0$.

Remarque XII.5. Tout système homogène est compatible : $X=0$ est solution.

Proposition XII.5. Soit $A\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et soit $B\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors, lorsque ce dernier est compatible, les solutions du système $AX=B$ sont de la forme X_0+X_H avec X_0 une solution particulière du système et X_H une solution du système homogène $AX=0$.

Démonstration. Il s'agit d'une analyse–synthèse immédiate. □

b) Opérations élémentaires

Pour résoudre un système linéaire, il nous est possible de faire usage des opérations suivantes, dites **élémentaires**, sur les lignes L_i du système :
(A) …échanger la position de deux lignes dans le système ($L_i\leftrightarrow L_j$) ;
(B) …multiplier une ligne par un nombre réel **non nul** λ ($L_i\leftarrow\lambda L_j$) ;
(C) …ajouter à une ligne une combinaison linéaire des **autres** $\left(L_i\leftarrow L_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j L_j\right)$.

Il est possible de donner une vision totalement matricielle de ces opérations élémentaires, que nous donnons ici.

Nous fixons dans tout ce paragraphe une matrice $A=(a_{i,j})_{i,j}\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Rappelons que nous avons défini précédemment la matrice $E_{k,l} \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ dont le coefficient en position (i,j) est $\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$.

Alors, pour $(i,j) \in (\llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket)$, le coefficient situé en position (i,j) de la matrice $AE_{k,\ell} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est :

$$\sum_{s=1}^{q} a_{i,s}\delta_{s,k}\delta_{j,\ell} = a_{i,k}\delta_{j,\ell}$$

et donc, si l'on note $C_1, \ldots, C_q$ les colonnes de la matrice A on a :

$$AE_{k,\ell} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & \ldots & 0 & C_k & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right),$$

la colonne C_k se situant en position ℓ. De la même façon, on vérifie que, si on note $L_1, \ldots, L_p$ les lignes de A :

$$E_{k,\ell}A = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \hline L_\ell \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \end{array} \right) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$$

la ligne L_ℓ se situant en position k.

✖ **Attention :** Les matrices élémentaires SUPRA ne sont pas de mêmes dimension : la première est $q \times q$, la seconde $p \times p$ ...Nous allons commettre ce type d'abus tout au long de ce paragraphe.

◇ Multiplication par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$; posons $n \in \{p,q\}$, $\ell \in \llbracket 1,n \rrbracket$ et :

$$M_\ell^\lambda = I_n + (\lambda - 1)E_{\ell,\ell}\,.$$

Les calculs du paragraphe précédent nous permettent d'affirmer que :

(i) l'opération élémentaire $C_\ell \leftarrow \lambda C_\ell$ sur A est équivalente au calcul du produit AM_ℓ^λ (pour $n = q$) ;

(ii) l'opération élémentaire $L_\ell \leftarrow \lambda L_\ell$ sur A est équivalente au calcul du produit $M_\ell^\lambda A$ (pour $n = p$).

◇ Échange

On pose, pour $n \in \{p,q\}$ et $i,j \in \llbracket 1,n \rrbracket$: :

$$X_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}\,.$$

On vérifie alors que :

(i) l'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$ est équivalente au calcul du produit $AX_{i,j}$ (pour $n = q$) ;

(ii) l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ est équivalente au calcul du produit $X_{i,j}A$ (pour $n = p$).

◇ **Combinaisons linéaires**

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \in \{p, q\}$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$\Omega_{i,j}^{\lambda} = I_n + \lambda E_{i,j} .$$

Il est alors aisé de vérifier que :

(i) l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ sur A est équivalente au calcul du produit $A\Omega_{i,j}^{\lambda}$ (pour $n = q$) ;

(ii) l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sur A est équivalente au calcul du produit $\Omega_{i,j}^{\lambda} A$ (pour $n = p$).

◇ **Conséquences**

La vision exposée *supra* des opérations élémentaires nous permet de démontrer que :

— les opérations élémentaires préservent l'inversibilité ;

— les opérations élémentaires sur les lignes ne modifient pas les solutions d'un système linéaire.

Ceci offre donc une justification théorique à l'algorithme du pivot, présenté *infra*.

c) Pivot de Gauss

L'objet de ce chapitre est de présenter une vision matricielle et générale de l'algorithme exposé dans le chapitre II. Nous ferons volontairement l'impasse sur diverses technicités et justification théoriques.

◇ **Cas d'étude**

On se place dans ce paragraphe dans le cas d'un système linéaire de la forme $AX = B$ avec $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Son inconnue est de la forme $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K})$.

◇ **Initialisation**

Si A est la matrice nulle. Nous avons entière confiance en la capacité de notre lecteur à résoudre le système linéaire étudié.

Dans le cas contraire, la matrice A admet *a minima* un coefficient non nul. Quitte à échanger des lignes (équations) ou colonnes (**inconnues** : prendre garde à ne pas oublier que l'on a procédé à cet échange !), il nous est possible de supposer que $a_{1,1} \neq 0$.

On effectue alors les opérations élémentaires suivantes (dans l'ordre) sur les matrices A **et** B :

— $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{a_{1,1}} L_1$;

— $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1} L_1$ pour $i \in [\![2, p]\!]$.

Nous venons de transformer notre système en un autre, noté $A_1X = B_1$, tel que la matrice A_1 ait la forme suivante :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & (\star) & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

◇ **Hérédité**

L'objectif de cette étape est de donner un procédé permettant de transformer (*via* équivalence matricielle) un système linéaire de la forme $A_kX = B_k$ avec

$$A_k = \left(\begin{array}{c|c} I_k & (\star) \\ \hline 0 & (\star) \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

en un système de la forme $A_{k+1}X = B_{k+1}$, avec

$$A_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} I_{k+1} & (\star) \\ \hline 0 & (\star) \end{array}\right).$$

Quitte à opérer sur les lignes et (prudemment) sur les colonnes, nous pouvons supposer que $a_{k+1,k+1} \neq 0$ (à moins d'avoir déjà terminé, ce qui est une excellente nouvelle !). Il nous suffit alors d'effectuer les opérations élémentaires suivantes :

— $L_{k+1} \leftarrow \dfrac{1}{a_{k+1,k+1}} L_{k+1}$;

— $L_i \leftarrow L_i - a_{i,k+1}L_{k+1}$ pour $i \neq k+1$.

Une fois ce procédé terminé, on itère jusqu'à tomber sur une matrice A_r peut être transformée, quitte à opérer sur les lignes, en :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} I_r & (\star) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Le système peut alors être résolu par remontée si il est compatible. Dans le cas contraire, une équation contradictoire apparaîtra, mettant fin à nos efforts. Notons que dans le cas compatible certaines inconnues peuvent ne pas être déterminées de façon unique : cela signifie que l'on dispose de familles de solution à paramètres, les valeurs de ces derniers pouvant être choisies arbitrairement.

d) Inversion d'une matrice carrée

Nommés ainsi en l'honneur du mathématicien et philosophe genevois Gabriel Cramer (1704—1752), les systèmes de Cramer représentent d'une certaine façon le "cas idéal" de l'étude des systèmes linéaires.

Définition XII.8. Un système linéaire est dit **de Cramer** si :

(i) il admet autant d'équations que d'inconnues ;

(ii) sa matrice est inversible.

✌ **Remarque XII.6.** En résumé, un système de Cramer est un système linéaire de la forme $AX = B$ avec $A \in GL_p(\mathbb{K})$.

➠ **Exemple XII.7.** Le système

$$\begin{cases} 2x + y &= 1 \\ x + 2y &= 2 \end{cases}$$

est de Cramer.

✌ **Remarque XII.7.** Soit $AX = B$ un système de Cramer. Alors il admet une unique solution, donnée par $X = A^{-1}B$.

Pour déterminer l'inverse d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on peut donc lui appliquer le pivot de Gauss jusqu'à obtenir la matrice I_n. Si l'on effectue les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, sur la matrice identité, on obtient la matrice inverse A^{-1}. On parle alors de **méthode de Gauss–Jordan**.

➠ **Exemple XII.8.** Déterminons l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. Pour ce faire, nous partons de :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

et effectuons les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$, obtenant :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}.$$

Nous effectuons ensuite $L_2 \leftarrow \dfrac{-1}{3} L_2$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -7 & 0 & 1 \end{array}$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

avant de conclure par $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}.$$

In fine, on trouve :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une conséquence de ce procédé est le résultat suivant, fort utile au demeurant et sur lequel nous reviendrons dans le chapitre XXI.

Proposition XII.6. Soit $M = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ une matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$M \in GL_n(\mathbb{K})$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ m_{k,k} \neq 0\,.$$

Dans ce cas, l'inverse de M est également triangulaire, dans le même "sens" que M.

✍ **Exercice XII.3.** Retrouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ en résolvant un système linéaire.