# Chapitre XI

# Dérivation

Dans tout ce chapitre, nous fixons un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

## 1.⁻ Notion de dérivée

### a) Qu'est–ce ?

**Définition XI.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que $f$ est **dérivable en** $a$ si son taux d'accroissement en $a$ admet une limite finie, *i.e* si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

Cette limite est alors appelée **nombre dérivé de** $f$ **en** $a$.

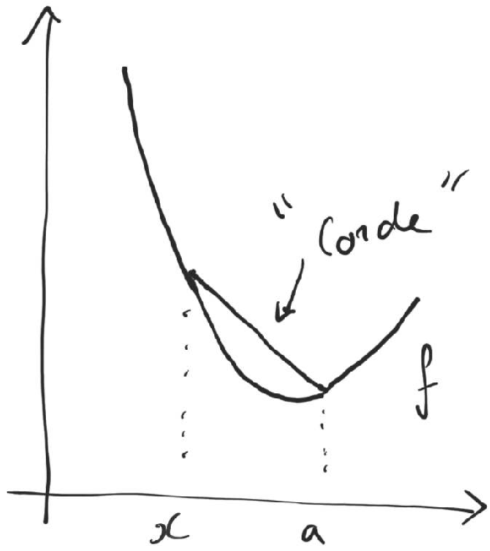
**Notation.** *Si* $f$ est dérivable, on pose $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

**Remarque XI.1.**

— Il peut être parfois utile de se ramener à l'écriture alternative suivante (lorsque les quantités existent) :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

— Géométriquement, les taux d'accroissement correspondent aux pentes des "cordes" associées à la courbe représentative de $f$.




— En sciences appliquées, la dérivée en un point s'interprète cinématiquement comme une vitesse instantanée.

**Exemple XI.1.**

Pour la fonction $f : x \mapsto x^2$ on a, au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ (excluant $a$) :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{x^2-a^2}{x-a} \\ &= x+a \\ &\xrightarrow[x\to a]{} 2a\end{aligned}$$

et donc $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = 2a$.

**Proposition XI.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a$$
$$\Longleftrightarrow$$
il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon$ une fonction définie au voisinage de $a$ et de limite nulle en $a$ tels que $f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ au voisinage de $a$.

Dans ce cas, on a de plus $f'(a) = \lambda$.

**Vocabulaire.** L'expression *supra* est appelée **développement limité** à l'ordre 1 de la fonction $f$ en $a$ (*cf.* chapitre XVII). Le terme en $(x-a)\varepsilon(x)$ sera dit **négligeable** par rapport à $x - a$ au voisinage de $a$.

**Remarque XI.2.** On retrouve le résultat vu en première : la courbe représentative de $f$ peut être approximée par une droite au voisinage de $a$ ; celle–ci admet pour équation

$$y = (x-a)f'(a) + f(a)$$

et est appelée **tangente à la courbe de $f$ en $a$**. Notons au passage que si $f'(a) = 0$, la tangente est **horizontale** et que si le taux d'accroissement tend vers l'infini, notre courbe représentative admet une **tangente verticale** (elle n'est alors évidemment pas dérivable).

✖ **Attention :** Ne pas confondre la notion de tangente et celle d'asymptote, que nous étudierons au chapitre XVII.

*Démonstration.*

($\Downarrow$) Si $f$ est dérivable en $a$, il suffit de poser $\varepsilon : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$. On a alors bien $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et l'égalité voulue avec $\lambda = f'(a)$.

($\Uparrow$) On a, au voisinage de $a$ (excluant $a$) :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lambda + \varepsilon(x) \\ &\xrightarrow[x\to a]{} \lambda\end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

**Proposition XI.2.** Toute fonction dérivable en un point de $I$ y est continue.

✖ **Attention :** la réciproque est **fausse**. La fonction valeur absolue est continue en 0 et pourtant :

$$\frac{|x|}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

et

$$\frac{|x|}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1$$

ce qui signifie que cette fonction n'est pas dérivable en 0.

*Démonstration.* Soit $a \in I$ et soit $f$ dérivable en $a$. Alors d'après la proposition XI.1 on a, au voisinage de $a$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\underbrace{\varepsilon(x)}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} \\ &\xrightarrow[x\to a]{} f(a)\end{aligned}$$

et donc $f$ est continue en $a$. □

**Définition XI.2.** Une fonction dérivable en tout point de $I$ est dite dérivable sur $I$. La fonction

$$\begin{aligned}f' : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x)\end{aligned}$$

est alors appelée **dérivée de $f$**.

**Notation.** On note $\mathscr{D}(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $I$. La dérivée pourra être noté $f'$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ou même $\mathrm{D}f$, mais **surtout pas** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

➠ **Exemple XI.2.** Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

et

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = f(h)$$

avec $h = \dfrac{1}{x}$ et $f : h \mapsto \ln(1+h)$. Or, par dérivabilité de $f$ en 0 on, au voisinage de 0 "en $h$" :

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + h\varepsilon(h) \qquad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

soit

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

*In fine*, on a :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(1+\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} e\,.$$

### ◇ Dérivées usuelles

Les fonctions vues dans le chapitre II sont dérivables en presque tout point de leurs ensembles de définition respectifs. Nous rappelons dans le tableau ci–ensuite les valeurs de leurs nombres dérivés en les points *ad–hoc*.

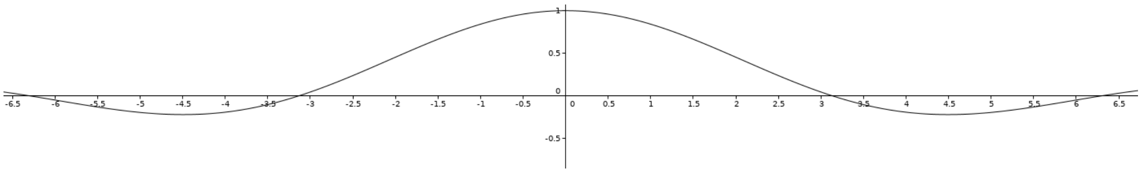
| **Valeur de $f(x)$** | **Ensemble de dérivabilité** | **Valeur de $f'(x)$** |
|---|---|---|
| $x^a$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $ax^{a-1}$ |
| $a^x$ $(a>0)$ | $\mathbb{R}$ | $\ln(a)a^x$ |
| $\log_a(x)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{1}{x\ln(a)}$ |
| $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin(x)$ |
| $\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\cos(x)$ |
| $\tan(x)$ | $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle\vert\, k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ |
| $\mathrm{arcos}(x)$ | $]-1,1[$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arcsin(x)$ | $]-1,1[$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\mathrm{ch}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{sh}(x)$ |
| $\mathrm{sh}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{ch}(x)$ |
| $\mathrm{th}(x)$ | $\mathbb{R}$ | $1-\mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$ |

Un cas particulier mérite d'être souligné : les fonctions puissances $x\mapsto x^a$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ si $a\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $a\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. Les racines $n$–ièmes ne sont jamais dérivables en 0,mais sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ si $n$ est impair.

➠ **Exemple XI.3.** Comme la fonction sinus est dérivable en 0, on a

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \cos(0) = 1$$

et donc la fonction sinus cardinal sinc : $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$.



## b) Dérivées directionnelles

**Définition XI.3.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \overset{\circ}{I}$.

— Si $a \neq \min I$, on appelle **dérivée à gauche de $f$ en $a$** la quantité (si elle existe)
$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

— Si $a \neq \max I$, on appelle **dérivée à droite de $f$ en $a$** la quantité (si elle existe)
$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

➠ **Exemple XI.4.** Soit $f : x \mapsto |x|$ ; alors $f$ est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = 1$, $f'_g(0) = -1$.

**Proposition XI.3.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors :

$f$ est dérivable en $a$

$\Longleftrightarrow$

$f$ admet une dérivée à gauche et à droite en $a$ qui sont égales.

*Démonstration.* Cela découle du résultat analogue sur les limites directionnelles, à savoir la proposition IX.11 □

## c) Classes de fonctions

**Définition XI.4.** Soit $k \geq 1$ ; une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite $k$–fois dérivable sur $I$ si :

— $k = 1$ et $f$ est dérivable sur $I$ ; on note alors $f^{(1)} = f'$ ;

— $k \geq 2$ et la fonction $f^{(k-1)}$ est dérivable sur $I$ ; on note alors $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

**Notation.** On note $\mathscr{D}^k(I)$ l'ensemble des fonctions $k$ fois dérivables sur $I$. La fonction dérivée $k$–ième $f^{(k)}$ pourra également être notée $\mathrm{D}^k f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

➠ **Exemple XI.5.** La fonction $x \mapsto x^2$ est 7 fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée septième nulle. Sa dérivée seconde est $x \mapsto 2$.

**Convention.** On notera, pour $f \in \mathscr{C}^0(I)$, $f^{(0)} = f$.

✌ **Remarque XI.3.** Soit $k \geq 1$ ; alors si $f$ est une fonction $k$–fois dérivable sur $I$, pour tout $0 \leq j < k$, la fonction $f^{(j)}$ est continue (car dérivable).

**Définition XI.5.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$** si :
- $f \in \mathscr{D}^k(I)$ ;
- $f^{(k)} \in \mathscr{C}^0(I)$.

Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que $f$ est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$**.

**Notation.** On notera, sans surprise, $\mathscr{C}^k(I)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur $I$.

➠ **Exemple XI.6.** Les fonctions usuelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans les ensembles mentionnés dans le tableau du paragraphe a).

✌ **Remarque XI.4.**
- On a la chaîne d'inclusions suivante :
$$\mathscr{C}^0(I) \supset \mathscr{D}^1(I) \supset \mathscr{C}^1(I) \supset \mathscr{D}^2(I) \supset \ldots \supset \mathscr{C}^{(k)}(I) \supset \mathscr{D}^{(k+1)}(I) \supset \ldots \supset \mathscr{C}^\infty(I)$$
et toutes ces inclusions sont **strictes**. Par exemple, $\sqrt{\cdot} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+) \setminus \mathscr{D}^1(\mathbb{R}_+)$ et $x \mapsto x^{\frac{3}{2}} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+) \setminus \mathscr{D}^2(\mathbb{R}_+)$.
- Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$, alors $f' \in \mathscr{C}^{(k-1}(I)$.
- On a
$$\mathscr{C}^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathscr{D}^k(I)\ .$$

✍ **Exercice XI.1.** Démontrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ se prolonge en 0 en une fonction dérivable mais pas de classe $\mathscr{C}^1$.

## d) Opérations sur les dérivées

### ◇ Au premier ordre

**Proposition XI.4.** Soient $f, g \in \mathscr{D}^1(I)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $f + \lambda g$ est dérivable sur $I$ et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$ ;

(ii) $f \times g$ est dérivable sur $I$ et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$ ;

(iii) si $g$ ne s'annule pas sur $I$, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I$ et
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\ ;$$

*Démonstration.* (i) Immédiat par opération sur les limites (passer aux taux d'accroissement).

(ii) Soient $x, a \in I$ tels que $x \neq a$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &\xrightarrow[x\to a]{} f(a)g'(a)+g(a)f'(a)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(iii) S'obtient de façon analogue au précédent, avec des calculs un tantinet plus crades.

□

✖ **Attention :** il convient de prêter à la rédaction une attention particulière ; en particulier, on ne saurait dériver une fonction sans avoir préalablement justifié sa dérivabilité.

**Proposition XI.5.** Soient $I, J$ deux intervalles d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et soient $f \in \mathscr{D}^(I)$ et $g \in \mathscr{D}^1(J)$ telles que $f(I) \subset J$. Alors :

(i) $g \circ f \in \mathscr{D}^1(I)$ ;

(ii)
$$(g\circ f)' = f' \times g'\circ f\ .$$

*Démonstration.* Soit $a \in I$ et soit $b = f(a) \in J$. Alors, par proposition XI.1, il existe $W \in \mathscr{V}(b)$ tel que :

$$\forall y \in W \quad : g(y) = g(b) + (y-b)g'(b) + (y-b)\varepsilon(y)$$

avec $\varepsilon(y) \xrightarrow[y\to b]{} 0$. Comme $f(a) = b$ et que $f$ est continue, il existe de plus $V \in \mathscr{V}(a)$ tel que $f(V) \subset W$ et donc, si $x \in V \cap I$ on a $f(x) \in W$ *ergo* :

$$g\circ f(x) = g\circ f(a) + (f(x)-f(a))g'\circ f(a) + (f(x)-f(a))\underbrace{\varepsilon(f(x))}_{\xrightarrow[x\to a]{}0}\ .$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{g\circ f(x) - g\circ f(a)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g'\circ f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\varepsilon(f(x))\\ &\xrightarrow[x\to a]{} f'(a)g'\circ f(a)\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. □

➠ **Exemple XI.7.** La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable comme composée des fonctions dérivables

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\to \\ x &\mapsto \frac{1}{x}\end{aligned}$$

et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sa dérivée vérifie, pour tout $x > 0$ :

$$(\exp \circ f)'(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \ .$$

**Proposition XI.6.** Soient $I, J$ deux intervalles d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to J$ une fonction **bijective et continue sur** $I$. Soit $a \in I$ tel que :

— $f$ soit dérivable en $a$ ;
— $f'(a) \neq 0$.

Alors

(i) $f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ ;

(ii) $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$, *i.e* :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \ .$$

**Remarque XI.5.**

— Ce théorème a donc **quatre** hypothèses à vérifier : deux globales (portant sur la fonction) et deux locales (relatives au point $a$).
— On retrouve le résultat énoncé dans le théorème II.4 : une bijection dérivable admet une réciproque dérivable en tout point de non–annulation de sa dérivée.
— Par la proposition IX.18, la fonction $f$ est strictement monotone.

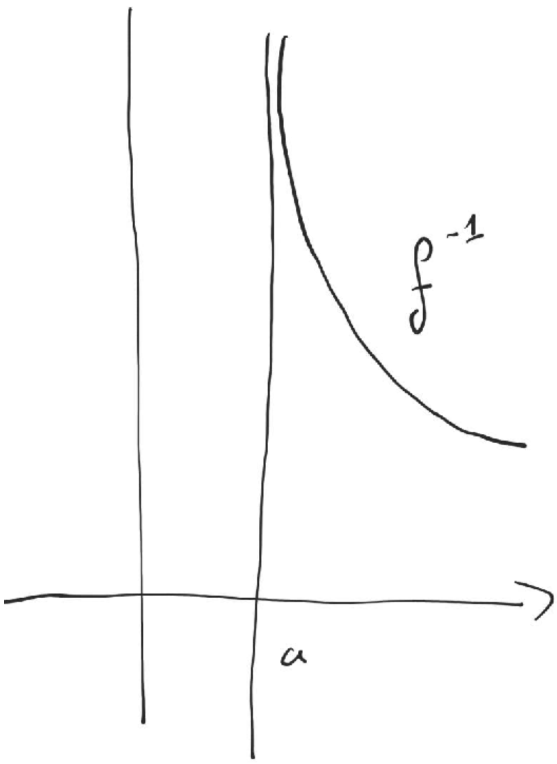
**Exemple XI.8.** Nous avons vu plusieurs applications de ce théorème dans le chapitre II (fonctions trigonométriques réciproques).

*Démonstration.* Soit $V \in \mathscr{V}(a)$, $x \in V \setminus \{a\}$ et $y = f(x)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} &= \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \\ &\xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{f'(a)} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Remarque XI.6.** Si la dérivée de $f$ s'annule en $a$, la fonction réciproque y admet une tangente verticale car le taux d'accroissement ci–dessus tend vers l'infini.




Dans le cas contraire, la fonction réciproque admet au point $f(a)$ une tangente dont le coefficient directeur est l'inverse de celui de la tangente à la courbe de $f$ en $a$.

On retrouve, en reformulant, la proposition vue au chapitre II.

**Corollaire XI.6.a.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'$ **ne s'annule pas** sur $I$. Alors :

(i) $f$ admet une réciproque $f^{-1}$ dérivable sur $f(I)$ ;

(ii)
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} .$$

### ◇ Aux ordres supérieurs

Les choses se passent très bien concernant les dérivées d'ordre supérieur d'une combinaison linéaire ; les formules se compliquent (un peu) pour le produit, avec le résultat suivant du au mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716).

**Proposition XI.7** (Formule de Leibniz)**.** Soient $f, g \in \mathscr{D}^n(I)$ $(n \geq 1)$. Alors la fonction $fg \in \mathscr{D}^n(I)$ et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} .$$

*Démonstration.* Démontrons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

— $n = 1$ : se référer au paragraphe précédent.

— Supposons la propriété vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur $I$.
Les fonctions $f$ et $g$ sont, en particulier, $n$ fois dérivables sur $I$ et donc par hypothèse de récurrence la fonction $fg$ l'est aussi avec

$$\forall\, x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)\,.$$

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur $I$ donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur $I$. Ainsi la fonction $fg$ est $(n+1)$ fois dérivable et :

$$\forall\, x \in I, \quad (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x)\right)\,.$$

En décomposant la somme en deux et en procédant à un changement d'indice sur la deuxième somme, on obtient, pour $x \in I$ :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)\\ &= f^{(n+1)}(x) g(x) + f(x) g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)\,.\end{aligned}$$

La propriété était initialisée et héréditaire, elle est vérifiée sur $\mathbb{N}$. □

✍ **Exercice XI.2.** Le lecteur possédé de tendances masochistes pourra calculer les dérivées successives de $\sin \times \cos$.

La succession de résultats suivante est énoncée sans démonstration. Le lecteur pourra si il le souhaite combler ce manque à la sueur de son front.

**Proposition XI.8.**

(i) L'inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ ne s'annulant pas est de classe $\mathscr{C}^k$.

(ii) La composée de deux fonctions de classes $\mathscr{C}^k$ compatibles est de classe $\mathscr{C}^k$.

(iii) La réciproque d'une bijection de classe $\mathscr{C}^k$ dont **la dérivée première** ne s'annule pas est de classe $\mathscr{C}^k$.

Nous ne donnons pas dans les cas énoncés *supra* de formules pour le calcul explicite des dérivées successives, et nous suggérons au lecteur de nous en être reconnaissant.

# 2.⁻ Accroissements finis

## a) Extrema locaux

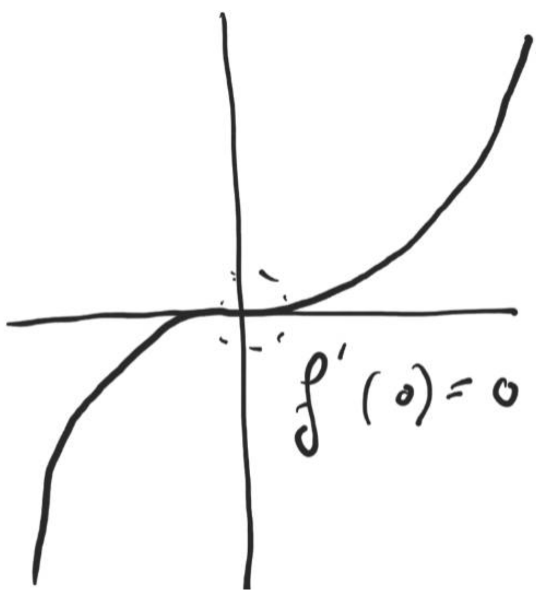
Nous pouvons reformuler les définitions vues au chapitre II en utilisant un langage un peu plus évolué. Notons le gain de place occasionné.

**Définition XI.6.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $a \in I$, on dit que :
- $f$ admet un maximum local en $a$ si $f(x) \leq f(a)$ au voisinage de $a$ ;
- $f$ admet un minimum local en $a$ si $f(x) \geq f(a)$ au voisinage de $a$.

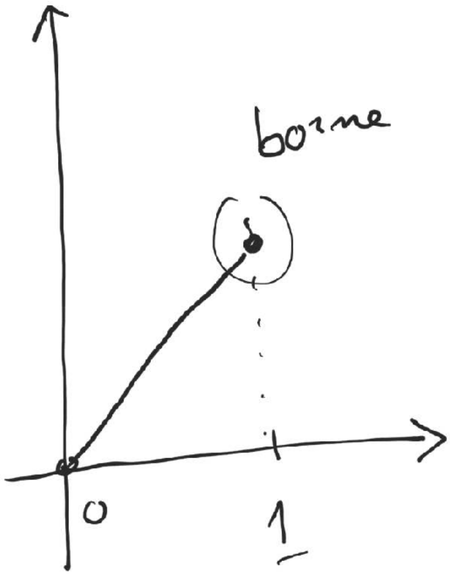
**Proposition XI.9.** Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathring{I}$ et soit $a \in \mathring{I}$. **Si** $f$ admet un extremum local en $a$, **alors** $f'(a) = 0$.

**Vocabulaire.** Un point d'annulation de $f'$ est appelé **point critique** de la fonction $f$.

✖ **Attention :** la réciproque est **fausse**. En effet, la fonction $x \mapsto x^3$ admet pour dérivée $x \mapsto 3x^2$ qui s'annule en 0 sans que ce dernier ne soit un extremum local de la fonction initiale.




De même, il est **essentiel** que $a$ ne soit pas une borne de $I$ ; penser à la fonction $x \mapsto x$ sur $[0, 1]$...




*Démonstration.* Plaçons nous dans le cas où $a$ est un maximum local de $f$. Alors, au voisinage de $a$ :

— si $x < a$,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$
et donc par passage à la limite $f'_g(a) \geq 0$ ;

— si $x > a$,
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$
et donc par passage à la limite $f'_d(a) \leq 0$.

Or $f$ est dérivable en $a$, donc $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$. On en déduit que $f'(a) = 0$. □

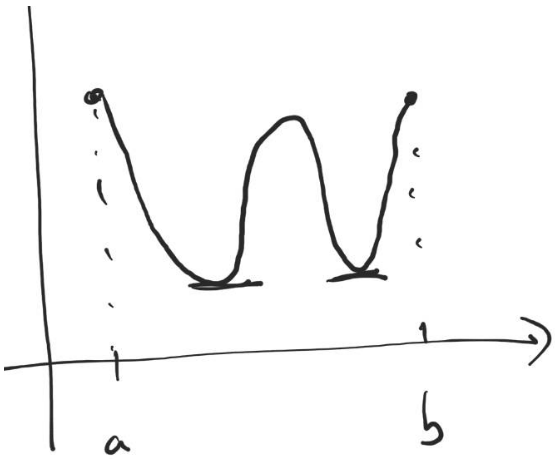
✌ **Remarque XI.7.** Dans le cas $\mathscr{C}^1$, on peut démontrer ce résultat en appliquant le TVI (théorème IX.17) à $f'$.

## b) Théorème de Rolle

L'heuristique du résultat suivant se trouve dans les écrits de Michel Rolle (français, 1652—1719). Sa forme moderne, liée au théorème des accroissements finis, doit beaucoup aux écrits d'Augustin Louis Cauchy (français,1789—1857) et Joseph–Louis Lagrange (italien naturalisé français, 1736—1813). La démonstration proposée ici s'inspire de celle proposée par Joseph–Alfred Serret (français, 1819—1885).

**Théorème XI.10** (Rolle)**.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que :
— $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$ ;
— $f \in \mathscr{D}^1(]a, b[)$ ;
— $f(a) = f(b)$.
Alors :
$$\exists\, c \in ]a, b[,\ f'(c) = 0\ .$$

**Remarque XI.8.** L'idée derrière ce théorème n'a rien d'ésotérique (rétrospectivement) : si $f(a) = f(b)$, alors la courbe représentative de la fonction $f$ admettra au moins une tangente horizontale entre $a$ et $b$.




*Démonstration.* Si $f$ est constante, c'est trivial. Sinon, il existe (par exemple) $y \in ]a, b[$ tel que $f(y) < f(a)$ et donc $f$ admet un minimum global par théorème des bornes atteintes (corollaire IX.17.d) en un point (non déterminé) $c \in ]a, b[$. Ainsi, $f'(c) = 0$ par proposition XI.9. □

**Exemple XI.9.**

— La dérivée d'un polynôme admet une racine entre chaque paire de racines de ce dernier.

— En physique, un mobile unidimensionnel revenant à son point de départ devra annuler sa vitesse à un instant donné.

## c) Théorème des accroissements finis

Le théorème qui suit, point central de ce chapitre, est du à Augustin Louis Cauchy (français,1789—1857) et Joseph–Louis Lagrange (italien naturalisé français, 1736—1813).

**Théorème XI.11** (Accroissements finis)**.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que :

— $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$ ;

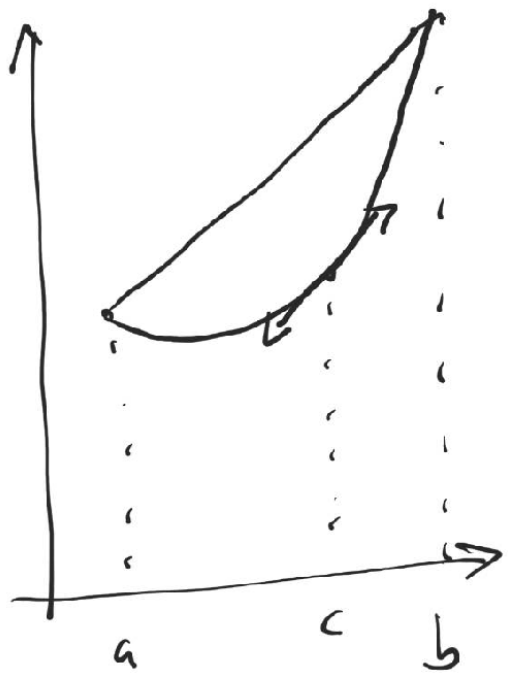
— $f \in \mathscr{D}^1(]a, b[)$.

Alors :

$$\exists c \in ]a, b[, \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

**Remarque XI.9.**

— Géométriquement, ce résultat se traduit de la façon suivante : il existe un point $c$ en lequel la tangente à la courbe représentative de $f$ est parallèle à la "corde" reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.




— En physique, ce résultat implique qu'il existe un instant dans tout mouvement en lequel vitesses instantanée et moyenne sont confondues.

*Démonstration.* Il suffit d'applique le théorème de Rolle à la fonction

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) . \end{aligned}$$

□

**Corollaire XI.11.a** (Inégalité des accroissements finis)**.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que :
— $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$ ;
— $f \in \mathscr{D}^1(]a, b[)$ ;
— il existe $M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in ]a, b[, \ |f'(x)| \leq M .$$

Alors :

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq M .$$

✌ **Remarque XI.10.** La troisième hypothèse *supra* est toujours vérifiée par les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment.

➠ **Exemple XI.10.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

### ◇ Une application : fonctions lipschitziennes

La classe de fonctions définies ci–ensuite est nommée en l'honneur du mathématicien allemand Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832—1903).

**Définition XI.7.** Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite $M$–**lipschitzienne** si :

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|\,.$$

➠ **Exemple XI.11.** La fonction $x \mapsto x^2$ est 2–lipschitzienne sur $[0, 1]$. En effet, pour tous $x, y \in [0, 1]$ :

$$|x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y| \leq 2|x - y|\,.$$

**Proposition XI.12.** Toute application lipschitzienne est continue.

*Démonstration.* Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $M$–lipschitzienne et soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq M|x - a| \\ &\xrightarrow[x \to a]{} 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

✖ **Attention :** la réciproque est fausse. La fonction exponentielle n'est pas exemple pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

**Proposition XI.13.** Une fonction dérivable est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée.

*Démonstration.* Il s'agit d'un corollaire de l'inégalité des accroissements finis. □

➠ **Exemple XI.12.** Les fonctions continues sur un segment, les fonctions sinus, cosinus sont lipschitziennes.

### ◇ Une autre application : suites récurrentes et applications contractantes

On se fixe une application $f : I \to I$ **contactante**, *i.e* lipschitzienne de rapport $K \in ]0, 1[$. On fixe $u_0 \in \mathring{I}$ et on pose, pour $n \geq 0$ :

$$u_{n+1} = f(u_n)\,.$$

Si on suppose que $f$ admet un point fixe $c$, alors pour tout $n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - c| &= |f(u_n) - f(c)| \\ &\leq K|u_n - c| \\ &\ \ \vdots \\ &\leq K^n|u_1 - c| \\ &\to 0 \end{aligned}$$

et donc $u_n \to c$.

✌ **Remarque XI.11.** Il est possible de démontrer l'existence de ce point fixe dans le cas général.

✍ **Exercice XI.3.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par récurrence via :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}.$$

Démontrer que $(u_n)_n$ converge vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

➥ **Correction :** *Nous avons déjà remarqué dans le chapitre VII que l'unicité de la limite (proposition VII.1) entraîne que $\ell = \sqrt{1+\ell}$ et donc $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\ell$ doit être positive car les termes de la suite $u$ le sont et $\ell^2 = 1+\ell$). Par inégalité des accroissements finis, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est $\frac{1}{2}$–lispschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet de plus un point fixe (nous venons de le trouver !), d'où le résultat en appliquant l'heuristique vue supra.*

## d) Monotonie

**Théorème XI.14.**
Soit $f \in \mathscr{C}^0(I) \cap \mathscr{D}^1(\mathring{I})$. Alors :

(i) $f$ est croissante sur $I \iff f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$ ;

(ii) $f$ est décroissante sur $I \iff f' \leq 0$ sur $\mathring{I}$ ;

(iii) $f$ est constante sur $I \iff f' = 0$ sur $\mathring{I}$.

✖ **Attention :** I est un **intervalle**. Considérer la fonction $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}^*$ qui est de dérivée seconde nulle sans que sa dérivée première ne sont constante.

*Démonstration.* (i)

($\Rightarrow$) Soient $a \in \mathring{I}$ et $x \in I$ tels que $x > a$. Alors :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et donc, en passant à la limite $f'(a) = f'_d(a) \geq 0$.

($\Leftarrow$) Soient $x, y \in I$ tels que $x \geq y$. Alors, par TAF (théorème XI.11, applicable car $f \in \mathscr{C}^0([y,x]) \cap \mathscr{D}^1(]y,x[)$), il existe $c \in ]y,x[$ tel que :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) \geq 0$$

d'où le résultat.

(ii) Se traite de façon analogue.

(iii) Découle immédiatement de (i) et (ii).

□

**Corollaire XI.14.a.** Soit $f \in \mathscr{C}^0(I) \cap \mathscr{D}^1(\mathring{I})$ une fonction **croissante**. On pose :

$$\mathscr{E} = \{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\} .$$

Alors :

$$f \text{ est strictement croissante} \iff \mathscr{E} \text{ non contient aucun intervalle d'intérieur non vide.}$$

**Vocabulaire.** Un ensemble $\mathscr{E}$ vérifiant la propriété *supra* est dit **discret**.

*Démonstration.* Cela découle du point (iii) de la proposition précédente. □

✌ **Remarque XI.12.**
— Cela signifie que tout va bien si $\mathscr{E}$ ne contient aucun convexe non trivial, *i.e* si il est "rempli de trous".
— Un résultat analogue existe évidemment pour les fonctions décroissantes.

## e) Limite de la dérivée

La question qui nous intéresse dans ce paragraphe est la suivante : étant donné un point $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}^0(I) \cap \mathscr{D}^1(I \setminus \{a\})$, comment vérifier que $f$ est dérivable en $a$ ? Cela nous sera en particulier utile pour tester la régularité de prolongements par continuité.

**Proposition XI.15.** Soit $a \in I$ et soit $f \in \mathscr{C}^0(I) \cap \mathscr{D}^1(I \setminus \{a\})$. Alors :
— si $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \ell$ ;
— si $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, $f$ n'est pas dérivable en $a$ et sa courbe y admet une tangente verticale ;
— sinon, on ne peut conclure.

✌ **Remarque XI.13.** Dans le premier cas, la fonction $f'$ est *de facto* continue en $a$.

*Démonstration.* Soit $x \in I \setminus \{a\}$, par exemple $x > a$. En appliquant le TAF au segment $[a, x]$, on obtient l'existence de $c_x \in ]a, x[$ tel que

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et $c_x \xrightarrow[x \to a]{} a$ par encadrement. On en déduit le résultat en examinant les différentes limites possibles pour $f'(c_x)$ quand $x \to a$. □

➠ **Exemple XI.13.** Le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ (initialement définie sur $\mathbb{R}_+^*$, *cf.* chapitre IX) est dérivable en 0 de dérivée nulle car

$$\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 .$$

# 3.⁻ Fonctions convexes

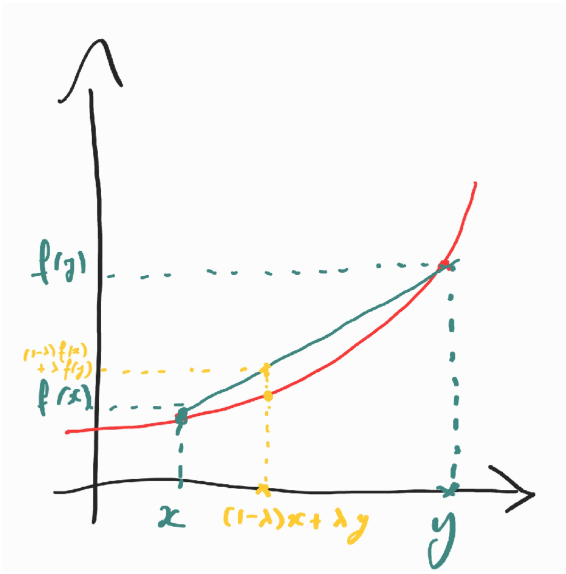
## a) C'est quoi ?

**Définition XI.8.** Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** si :

$$\forall\, x, y \in I,\ \forall\, \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\,.$$

**Vocabulaire.** Si $-f$ est une fonction convexe, on dira que $f$ est concave.

✌ **Remarque XI.14.** L'inégalité définissant les fonctions convexes nous indique que la droite sécante passant par deux points sur la courbe représentative d'une telle fonction est située **au dessus** de l'arc (portion de courbe) délimité par ceux–ci.




Il peut également être intéressant de faire le lien entre cette définition et la caractérisation paramétrique des convexes de $\mathbb{R}$ (corollaire III.12.a).

➠ **Exemple XI.14.**
- — les fonctions affines $x \mapsto \alpha x + \beta$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sont clairement convexes (et concaves) ;
- — la fonction valeur absolue est convexe par inégalité triangulaire ;
- — la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe ;
- — la fonction exponentielle est convexe (à ce stade, on peut le "voir" géométriquement ; nous le démontrerons au paragraphe suivant) ;
- — la fonction ln est concave ;
- — la fonction $x \mapsto x^3$ n'est ni concave, ni convexe ;
- — la réciproque d'une bijection convexe est concave (et inversement !) : penser à la symétrie existant entre leurs courbes représentatives.

**Proposition XI.16** (Inégalité de Jensen)**.** Soient $x_1, \ldots, x_n \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Alors :

(i) $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I$ ;

(ii)

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)\,.$$

✌ **Remarque XI.15.** On a nécessairement $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in [0,1]$.

*Démonstration.* Le point (i) se démontre par récurrence à partir de la convexité de $I$. Pour le (ii), procédons également par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

— $n = 1$ : trivial.

— Supposons l'inégalité vraie à un certain rang $n \geq 1$ et montrons-la pour $n+1$. On doit donc démontrer que, si $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \lambda_{n+1} a_{n+1}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(a_i\right) + \lambda_{n+1} f\left(a_{n+1}\right)$$

Si $\lambda_{n+1} = 1$, c'est terminé. Sinon, posons

$$\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}$$

pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ de sorte que $\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_n = 1$. L'inégalité voulue devient alors

$$f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i a_i + \lambda_{n+1} a_{n+1}\right) \leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i f\left(a_i\right) + \lambda_{n+1} f\left(a_{n+1}\right).$$

Par la définition de convexité, on a d'abord

$$f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i a_i + \lambda_{n+1} a_{n+1}\right) \leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i a_i\right) + \lambda_{n+1} f\left(a_{n+1}\right),$$

et l'hypothèse de récurrence nous permet ensuite de conclure puisqu'elle nous donne

$$\begin{aligned}(1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i a_i\right) + \lambda_{n+1} f\left(a_{n+1}\right) &\leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i f\left(a_i\right) + \lambda_{n+1} f\left(a_{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f\left(a_i\right).\end{aligned}$$

□

✍ **Exercice XI.4.** Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ ; montrer que :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \,.$$

➥ **Correction :** *Par inégalité de Jensen, en posant $f = -\ln$, on a :*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_k)$$

*i.e*

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_k)\,.$$

*On a donc :*

$$\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\right)$$

*d'où le résultat par croissance de la fonction* exp.

## b) Convexité et pentes

La caractérisation géométrique des fonctions convexes évoquée *supra* se traduit par la proposition suivante, qui nous dit qu'une fonction est convexe si et seulement si les pentes de ses tangentes sont croissantes.

**Proposition XI.17.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ est convexe ;

(ii) $\forall\, x, y, z \in I$,
$$(x < y < z) \Rightarrow \left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}\right) \;;$$

(iii) $\forall\, x, y, z \in I$,
$$(x < y < z) \Rightarrow \left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\right) \;;$$

(iv) $\forall\, x, y, z \in I$,
$$(x < y < z) \Rightarrow \left(\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\right) \,.$$

*Démonstration.* Nous allons démontrer que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ; on procède ensuite de façon analogue pour les deux autres assertions.

**(i)⇒(ii)** Si on suppose $f$ convexe et que l'on fixe $x, y, z \in I$, tels que $x < y < z$, alors $y \in ]x, z[$ et donc il existe $\lambda \in ]0, 1[$ tel que $y = (1-\lambda)x + \lambda z$. Par convexité de $f$, on a alors :

$$f(y) = f((1-\lambda)x + \lambda z) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)\,.$$

Ainsi :

$$f(y) - f(x) \leq \lambda(f(z) - f(x))$$

et il nous suffit pour conclure de remarquer que $\lambda = \dfrac{y-x}{z-x}$ par définition.

**(ii)⇒(i)** Soient $x, z \in I$ et soit $\lambda \in ]0, 1[$ (l'inégalité de convexité est triviale lorsque $\lambda \in \{0, 1\}$. Alors, en posant $y = (1-\lambda)x + \lambda z$ on a $x < y < z$ et $\lambda = \dfrac{y-x}{z-x}$. Il nous suffit alors de remonter les calculs *supra* pour vérifier que $f$ est bien convexe.

□

**Corollaire XI.17.a.** Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

✌ **Remarque XI.16.** Ce résultat nous indique que la courbe représentative d'une fonction convexe se situe **au dessus** de ses tangentes.

La convexité d'une fonction se traduit de façon simple lorsque cette dernière est une ou deux fois dérivable, comme nous l'exposons dans la proposition suivante.

**Proposition XI.18.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Si $f$ est dérivable, alors $f$ est convexe si et seulement si $f'$ est croissante ;

(ii) si $f$ est deux fois dérivable, alors $f$ est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

*Démonstration.* (i) Découle du corollaire XI.17.a.

(ii) Découle du point (i) et du théorème XI.14.

□

**Vocabulaire.** Un point où $f''$ change de signe est appelé **point d'inflexion** de la courbe de $f$. Ces points correspondent à un changement de convexité de la courbe de $f$.

➠ **Exemple XI.15.** On démontre ainsi aisément la concavité du logarithme et la convexité de l'exponentielle. Ceci nous livre une démonstration rapide des inégalités $\ln(1+x) \leq x$ et $1 + u \leq e^u$ pour $x \in ]-1, \infty$ et $u \in \mathbb{R}$.

## 4.⁻ Brêve extension aux fonctions à valeurs complexes

Il est aisé de vérifier qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont. On en déduit par exemple que la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto \alpha e^{\alpha x}$.

✖ **Attention :** le théorème de Rolle (XI.10) et le théorème des accroissements finis (XI.11) sont faux sur $\mathbb{C}$. On a cependant une version complexe de l'inégalité des accroissements finis (corollaire XI.11.a), dont nous admettrons la démonstration pour le moment (elle découle d'une simple majoration d'intégrale).

**Théorème XI.19** (Inégalité des accroissements finis, cas complexe)**.**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que :

$$\exists\, K \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in ]a, b[,\ |f'(x)| \leq K\ .$$

Alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|\ .$$

La notion de fonction convexe reposant sur des inégalités, elle ne se généralise évidemment pas aux fonctions à valeurs complexes (du moins pas sous cette forme).