

# Chapitre IX

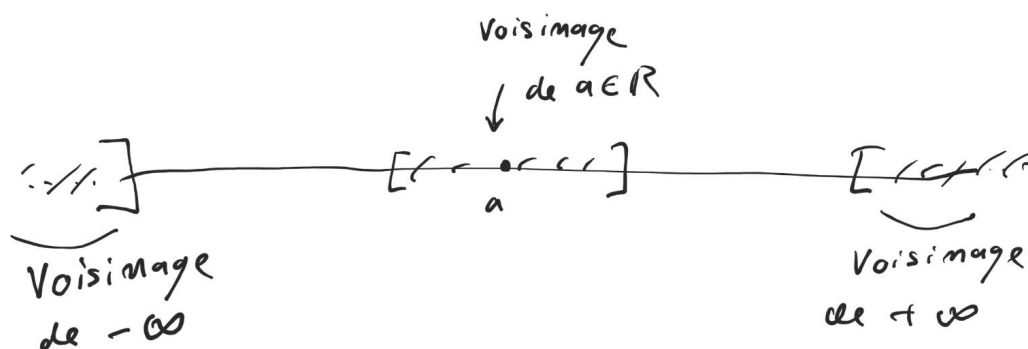
## Limites, continuité

### 1. Étude locale d'une fonction

#### a) Voisinages

**Définition IX.1.** Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . On appelle **voisinage de  $a$**  tout ensemble de la forme :

- $[a - \delta, a + \delta]$  avec  $\delta > 0$  si  $a \in \mathbb{R}$ ;
- $[M, +\infty[$  avec  $M \in \mathbb{R}$  si  $a = +\infty$ ;
- $] - \infty, m]$  avec  $m \in \mathbb{R}$  si  $a = -\infty$ .



**Notation.** On notera  $\mathcal{V}(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ .

▮ **Exemple IX.1.**  $[-1, 1] \in \mathcal{V}(0)$ ,  $\mathbb{R}_+ \in \mathcal{V}(\infty)$ .

✂ **Remarque IX.1.** Plutôt que de travailler avec des voisinages fermés comme ici, il est possible (et courant) de considérer des voisinages ouverts (du type  $]a - \delta, a + \delta[$ ) sans impact profond sur ce qui suit.

**Proposition IX.1.** Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Alors :

- (i) l'intersection de deux voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$  ;  
 (ii)

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}(a)} V = \begin{cases} \{a\} & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} .$$

*Démonstration.*

- (i) Immédiat si l'on prend le temps de faire une disjonction de cas selon les valeurs de  $a$ .  
 (ii) (⊃) Immédiat.  
 (⊂) Si  $a \in \mathbb{R}$ , alors si  $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}(a)} V$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ , i.e.  $|x - a| \leq \varepsilon$ . On en déduit que  $|x - a| \leq \inf \mathbb{R}_+^* = 0$  donc  $x = a$ .  
 Si  $a = +\infty$ , alors si on suppose qu'il existe  $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}(+\infty)}$ , il existe  $M > x$  et donc  $x \notin [M, +\infty[ \in \mathcal{V}(+\infty)$ , ce qui est absurde. On règle de la même façon le cas où  $a = -\infty$ .

□

**Proposition IX.2.** [Séparation de  $\overline{\mathbb{R}}$ ] Soient  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  **distincts**. Alors il existe  $V \in \mathcal{V}(a)$  et  $W \in \mathcal{V}(b)$  tels que :

$$V \cap W = \emptyset .$$

✂ **Remarque IX.2.** Cela signifie qu'étant donné deux points distincts de la droite réelle achevée, on peut leur trouver deux voisinages ne se rencontrant pas. Topologiquement, on dit que  $\overline{\mathbb{R}}$  est **séparé**.

*Démonstration.* Si  $a$  et  $b$  sont réels avec  $a < b$ , en posant  $\delta = \frac{b-a}{3}$  on vérifie aisément que les voisinages  $[a - \delta, a + \delta] \in \mathcal{V}(a)$  et  $[b - \delta, b + \delta] \in \mathcal{V}(b)$  sont disjoints. Si  $a$  ou  $b$  est égal à  $\pm\infty$  se traite de façon similaire. □

**Définition IX.2.** Soit  $\mathcal{P}$  un prédicat dépendant d'une variable réelle  $x$  et soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . On dira que  $\mathcal{P}(x)$  est vraie au voisinage de  $a$  si :

$$\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V, \mathcal{P}(x) .$$

▮ **Exemple IX.2.**  $x^2 \leq 1$  est vraie au voisinage de 0 ;  $x \mapsto x^2$  est décroissante au voisinage de  $-42$ .

## b) Limite en un point

**Définition IX.3.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . On appelle :

- **intérieur** de  $I$  l'ensemble

$$\overset{\circ}{I} = I \setminus \{a, b\} \subset \mathbb{R} ;$$

- **adhérence** de  $I$  l'ensemble

$$\bar{I} = I \cup \{a, b\} \subset \overline{\mathbb{R}} .$$

▮▮▮ **Exemple IX.3.**  $\overset{\circ}{[0, 2[} = ]0, 2[$  et  $\overline{[0, \infty[} = \overline{\mathbb{R}}_+$ .

On fixe dans toute la suite du chapitre un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

**Définition IX.4.** Soit  $a \in \bar{I}$  et soit  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  **tend vers  $\ell$  en  $a$**  lorsque :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists W \in \mathcal{V}(a), f(W \cap I) \subset V .$$

La quantité  $\ell$  est alors appelée **limite** de  $f$  en  $a$ .

**Notation.** Nous utiliserons indifféremment  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

✌ **Remarque IX.3.**

- Rappelons que l'assertion  $f(W \cap I) \subset V$  signifie

$$\forall x \in W \cap I, f(x) \in V .$$

- Cette définition peut être traduite "en français" de la même façon que son analogue séquentiel vu dans le chapitre VII : pour tout voisinage de  $\ell$ , si  $x$  est suffisamment proche de  $a$ ,  $f(x)$  appartiendra à ce voisinage.
- Si  $f$  est définie en  $a$  et admet une limite en  $a$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

✖ **ATTENTION :** ne pas confondre la limite en  $a$  et les limites directionnelles ("en  $a^+$  ou  $a^-$ ") sur lesquelles portera le paragraphe e).

Cette définition de limite possède l'avantage d'être universelle : peut importe que  $a$  ou  $\ell$  soient réels, infinis ou un mélange des deux, elle restera valable. Pour aider dans nos considérations pratiques, nous listons malgré des considérations de type "dans le cambouis jusqu'au torse" ci-ensuite. Une fois de plus, remercier l'auteur est inutile.

◇  $a, \ell \in \mathbb{R} :$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon) .$$

◇  $a \in \mathbb{R}, \ell = +\infty$  :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow (f(x) \geq M).$$

◇  $a \in \mathbb{R}, \ell = -\infty$  :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \delta) \Rightarrow (f(x) \leq m).$$

◇  $a = +\infty, \ell \in \mathbb{R}$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq M) \Rightarrow (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

◇  $a = -\infty, \ell \in \mathbb{R}$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq m) \Rightarrow (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

◇  $a = +\infty, \ell = -\infty$  :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq M) \Rightarrow (f(x) \leq m).$$

◇  $a = -\infty, \ell = +\infty$  :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq m) \Rightarrow (f(x) \geq M).$$

◇  $a = \ell = +\infty$  :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists R \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq R) \Rightarrow (f(x) \geq M).$$

◇  $a = \ell = -\infty$  :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \leq r) \Rightarrow (f(x) \leq m).$$

Youpi tralala, comme dirait l'autre.

#### ▣ Exemple IX.4.

— La fonction  $x \mapsto e^x$  tend vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$  car, pour tout  $M > 0$ ,  $(x \geq \ln(M)) \Rightarrow (e^x \geq M)$ . De même, on peut montrer que  $x^3 \xrightarrow{x \rightarrow -1} -1$ .

— La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en 0 ( $\mathbb{R}^*$  n'est pas un intervalle).

**Proposition IX.3.** La limite d'une fonction en un point, lorsqu'elle existe, est unique.

*Démonstration.* Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ayant deux limites  $\ell$  et  $\ell'$  en  $a \in \bar{I}$ . Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$  et  $V' \in \mathcal{V}(\ell')$ ; alors par définition de limite il existe  $W, W' \in \mathcal{V}(a)$  tels que

$$f(W \cap I) \subset V \text{ et } f(W' \cap I) \subset V'.$$

$W \cap W'$  est un voisinage de  $a$  intersectant  $I$  et, si  $x \in W \cap W' \cap I$  alors  $f(x) \in V \cap V'$ . On en déduit que  $V \cap V' \neq \emptyset$ , ce qui entraîne par contraposée de la proposition IX.2 que  $\ell = \ell'$ . □

**Proposition IX.4.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $f$  admet une limite réelle en  $a$ , alors elle est bornée au voisinage de ce point.

*Démonstration.* Comme  $\ell$  est réel, ses voisinages sont bornés, d'où le résultat par définition de limite.  $\square$

**Proposition IX.5.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in \overline{I}$ . Alors :

(i)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \iff |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  ;

(ii) si  $g$  est une fonction bornée au voisinage de  $a$  et si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  alors

$$f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 .$$

*Démonstration.* Adapter la démonstration de propriétés similaires vues dans le chapitre VII.  $\square$

☞ **Remarque IX.4.** Quitte à "épointer" les voisinages (leur retirer le point  $a$ ), nous pouvons définir une notion de limite en  $a$  pour  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant toutes les propriétés vues ici. Notons toutefois que cela ne permet pas de doter  $x \mapsto \frac{1}{x}$  (par exemple) d'une limite en 0.

### c) Opérations sur les limites

Nous adaptons dans ce paragraphe les résultats démontrés sur les suites dans le chapitre VII. Nous laissons au lecteur le soin de transcrire les démonstrations *ad-hoc*.

**Proposition IX.6.** Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, a \in \overline{I}, \lambda \in \mathbb{R}, \ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$ . Alors on a, sauf dans les cas d'indétermination :

(i)  $f(x) + \lambda g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell + \lambda \ell'$  ;

(ii)  $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \ell'$  ;

(iii) si  $\ell \neq 0$ , alors  $f(x) \neq 0$  au voisinage de  $a$  et :

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{\ell} \text{ avec la convention que } \frac{1}{\pm\infty} = 0 .$$

**Proposition IX.7.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$  tel que :

—  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  ;

—  $f(x) > 0$  au voisinage de  $a$ .

Alors :

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty .$$

**Proposition IX.8** (Composition des limites). Soient  $I, J$  deux intervalles d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $b \in \bar{J}$ ,  $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$  et soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions telles que :

- $f(I) \subset J$ ;
- $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$ ;
- $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow b]{} \ell$ .

Alors :

$$g \circ f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell.$$

✘ **ATTENTION** : il est impératif de bien vérifier toutes les hypothèses avant d'appliquer ce résultat.

*Démonstration.* Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ ; alors il existe  $W \in \mathcal{V}(b)$  tel que  $g(W \cap J) \subset V$ . Mais il existe  $W' \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $f(W' \cap I) \subset W \cap J$  et donc :

$$g \circ f(W' \cap I) \subset g(W \cap J) \subset V$$

d'où le résultat. □

▮ **Exemple IX.5.** La fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  peut être vue comme la composée  $g \circ f$  avec :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned} .$$

Or :

- $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$ ;
- $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 0$ ;
- $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ ,

donc, par composition des limites :

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Proposition IX.9.** Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in \bar{I}$ . On suppose que  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$  et  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell'$ , avec  $\ell, \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$ . Alors :

- (i) si  $f \leq g$  au voisinage de  $a$ ,  $\ell \leq \ell'$ ;
- (ii) si  $\ell = \ell'$  et que  $h$  est une fonction définie au voisinage de  $a$  telle que  $f \leq h \leq g$ , alors  $h(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$ .

d) **Caractérisation séquentielle de la limite**

La proposition suivante est une complétion et reformulation du théorème VII.9.

**Proposition IX.10.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$  et  $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ . Alors :

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$$

pour toute suite  $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$  de limite  $a$ ,  $f(x_n) \rightarrow \ell$ .

☞ **Remarque IX.5.** Cette caractérisation nous servira surtout à démontrer une absence de limite. Par exemple,  $\sin$  n'admet pas de limite en  $+\infty$  car si une telle limite existait elle serait égale à  $\lim \sin(2n\pi) = 0$  et  $\lim \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

*Démonstration.* Faisons le pour  $a$  et  $\ell$  réels.

(↓) Soit  $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $a$  et soit  $\delta > 0$ ; alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \delta$$

*i.e*

$$\forall W \in \mathcal{V}(a), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in W.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ ; alors  $V = [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$  est un voisinage de  $\ell$  et donc il existe  $W \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $f(W \cap I) \subset V$ . On déduit de tout ceci que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - \ell| \leq \varepsilon$$

d'où la convergence de  $(f(x_n))_n$  vers  $\ell$ .

(↑) Démontrons le par contraposée. Si  $f$  ne tend pas vers  $\ell$  en  $a$ , alors il existe  $V = [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \in \mathcal{V}(\ell)$  tel que

$$\forall W \in \mathcal{V}(a), f(W \cap I) \not\subset V.$$

En particulier, cela est vrai pour les voisinages  $W_n = \left[ a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right]$  (pour  $n \geq 1$ ), et donc il existe une suite  $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$  telle que :

- $\forall n \geq 1, |x_n - a| \leq \frac{1}{n}$ ;
- $\forall n \geq 1, |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$ .

Donc, par encadrement  $x_n \rightarrow a$  et  $(f(x_n))_n$  ne converge pas vers  $\ell$ , d'où le résultat. □

## e) Limites directionnelles, fonctions monotones

**Définition IX.5.** Soit  $a \in \bar{I}$  et soit  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

— Si  $a \neq \inf I$ , on appelle **limite à gauche de  $f$  en  $a$**  la quantité (si elle existe)

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_{|I \cap ]-\infty, a[}(x).$$

— Si  $a \neq \sup I$ , on appelle **limite à droite de  $f$  en  $a$**  la quantité (si elle existe)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_{|I \cap ]a, +\infty[}(x).$$

▣▣▣ **Exemple IX.6.**

- $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ .
- Si  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\lfloor x \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow n^-} n-1$  et  $\lfloor x \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow n^+} n$ .

**Proposition IX.11.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in \overset{\circ}{I}$ . Alors :

$f$  admet une limite en  $a$

$\iff$

$f$  admet une limite à gauche et à droite en  $a$  qui sont égales à  $f(a)$ .

✘ **ATTENTION :** La condition d'égalité à  $f(a)$  n'est pas superfétatoire : l'indicatrice  $\mathbb{1}_{\{0\}}$  n'admet pas de limite en 0 (utiliser la caractérisation séquentielle en se rappelant que la suite nulle converge vers 0) et pourtant  $y$  admet une limite à gauche et à droite.

▣▣▣ **Exemple IX.7.** Revenir à et méditer sur

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

🔗 **Exercice IX.1.** En quels points de  $\mathbb{R}_+$  la fonction  $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$  admet-elle une limite ?

**Théorème IX.12** (Limite monotone).

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante et soit  $a \in \bar{I}$ . Alors :

(i) si  $a \in \overset{\circ}{I}$  alors les limites directionnelles de  $f$  en  $a$  existent, avec les égalités

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x > a\} \in \mathbb{R}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x < a\} \in \mathbb{R},$$

avec de plus

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x);$$

(ii) si  $a = \sup(I)$ , et  $a \in I$ , alors  $f$  admet une limite à gauche en  $a$  donnée par

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x < a\} \in \mathbb{R},$$

avec de plus

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a);$$

(iii) si  $a = \sup(I)$ , et  $a \notin I$ , alors  $f$  admet une limite à gauche en  $a$  donnée par

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x < a\},$$

cette borne supérieure étant prise dans  $\bar{\mathbb{R}}$ .

☞ **Remarque IX.6.** Ce résultat peut évidemment être adapté dans le cas décroissant.

*Démonstration.* Démontrons le point (i); pour ce faire, remarquons que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{f(x) \mid x < a\}$$

est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée par  $f(a)$ ; elle admet donc une borne supérieure  $M \leq f(a)$ . De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $M - \varepsilon$  ne majore pas  $\mathcal{E}$  et donc il existe  $x_0 < a$  tel que  $f(x_0) > M - \varepsilon$ , i.e.  $|M - f(x_0)| \leq \varepsilon$ .

Si  $x_1 \in ]x_0, a[$ , alors  $f(x_1) \geq f(x_0) \geq M - \varepsilon$ ; ce qui signifie que :

$$f(]x_0, a[) \subset [f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon].$$

On termine en remarquant que  $]x_0, a[$  est l'intersection d'un voisinage de  $a$  avec  $] - \infty, a[$ , ce qui permet de conclure quant à la limite, et en raisonnant de façon similaire pour obtenir la seconde inégalité.  $\square$

## 2. Fonctions continues

### a) C'est quoi ?

**Définition IX.6.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **continue** en un point  $a \in I$  si elle admet une limite finie en  $a$ . Si cela est vrai en tout point de  $I$ , on dira que  $f$  est continue sur  $I$ .

**Notation.** L'ensemble des fonctions continues sur  $I$  sera noté  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  ou simplement  $\mathcal{C}^0(I)$ .

▣► **Exemple IX.8.** La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Vocabulaire.** Si la limite à gauche (resp. à droite) de  $f$  en  $a$  existe, on dira que  $f$  est **continue à gauche** (resp. **à droite**) en  $a$ .

▣► **Exemple IX.9.**

- La fonction partie entière est continue à droite sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Les fonctions monotones sont continues à gauche et à droite en tout point de leur ensemble de définition.

**Proposition IX.13.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in I$ . Alors :

$$f \text{ est continue en } a \\ \iff \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) .$$

*Démonstration.* (↑) Trivial.

(↓) Supposons que  $f$  soit continue en  $a$ , i.e qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ . Cela signifie que :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists W \in \mathcal{V}(a), f(W \cap I) \subset V .$$

Or, pour tout  $W \in \mathcal{V}(a)$ ,  $a \in W \cap I$  ce qui entraîne que :

$$f(a) \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}(\ell)} V = \{\ell\}$$

d'où le résultat. □

▣► **Exemple IX.10.**

- Toutes les fonctions usuelles (cf. chapitre II) sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.
- La fonction suivante n'est pas continue en 0 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

En effet, si elle admettait une limite finie en 0, celle-ci devrait être égale à 1 et  $-1$  à la fois, ce qui est, vous en conviendrez, compliqué.

- La fonction valeur absolue est continue sur  $\mathbb{R}$ , mais pas la fonction partie entière.

Les propriétés relatives aux opérations sur les limites se traduisent par les résultats suivants, relatifs aux opérations présentées dans le chapitre II.

**Proposition IX.14.**  $(\mathcal{C}^0(I), +, \times)$  est un anneau commutatif, de neutres  $x \mapsto 0$  et  $x \mapsto 1$ . De plus, pour tous  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{C}^0(I)$ ,  $\lambda f \in \mathcal{C}^0(I)$  et l'inverse de toute fonction continue **ne s'annulant pas** est une fonction continue.

✘ **ATTENTION** : l'anneau  $\mathcal{C}^0(I)$  n'est pas intègre.

**Proposition IX.15.** La composée de deux fonctions continues compatibles est continue.

*Démonstration.* Cela découle de la composition des limites. □

## b) Prolongement par continuité

La question que nous nous posons dans ce paragraphe est la suivante : étant donné une fonction continue sur un intervalle "à trou", est-il possible de la prolonger de façon continue sur l'intervalle entier ?

**Définition IX.7.** Soit  $a \in I$  et soit  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On dit que  $f$  est **prolongeable par continuité** en  $a$  si il existe  $g \in \mathcal{C}(I)$  telle que

$$g|_{I \setminus \{a\}} = f.$$

☛ **Exemple IX.11.** La fonction  $\ln$  n'est pas prolongeable par continuité en 0.

**Proposition IX.16.** Soit  $a \in I$  et soit  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors :

$$\begin{aligned} f \text{ est prolongeable par continuité en } a \\ \iff \\ f \text{ admet une limite réelle en } a. \end{aligned}$$

☞ **Remarque IX.7.** Ceci est donc équivalent à l'existence et égalité des limites à droite et à gauche en  $a$  **LORSQUE**  $a \in \overset{\circ}{I}$ .

*Démonstration.*

(↑) Immédiat via :

$$g : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}.$$

(↓) Si il existe un prolongement par continuité  $g$  de  $f$  en  $a$ , alors  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a)$  et donc, comme  $g|_{I \setminus \{a\}} = f$  alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a)$ .

□

▮ **Exemple IX.12.** La fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$  se prolonge par continuité en 0 par 0. Attention, elle n'est pas prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}$  car

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

### c) Images d'intervalles

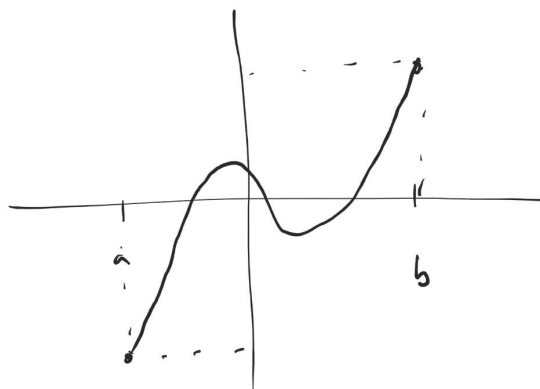
**Théorème IX.17** (Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$  telle que  $f(a)f(b) < 0$ . Alors :

$$\exists c \in ]a, b[, f(c) = 0.$$

#### ✂ Remarque IX.8.

- La condition  $f(a)f(b) < 0$  impose que  $f(a)$  et  $f(b)$  soient de signes opposés.
- Il n'y a pas nécessairement unicité du point d'annulation  $c$ .



- Notons cependant que si l'on rajoute la condition que  $f$  soit strictement monotone, le point  $c$  est unique.

*Démonstration.* On peut définir par récurrence trois suites  $(a_n)_n$ ,  $(b_n)_n$  et  $(c_n)_n$  selon le procédé suivant : posons  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et  $c_0 = \frac{a+b}{2}$ , puis, pour tout  $n \geq 0$

- si  $f(a_n)f(c_n) < 0$ , on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = c_n$  ;
- dans le cas contraire, on pose  $a_{n+1} = c_n$  et  $b_{n+1} = b_n$ .

Enfin, dans tous les cas, on pose :

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}.$$

On remarque alors que les suites  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  sont respectivement croissantes et décroissantes. De plus, si  $n \geq 1$  on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq b_n - a_n &= \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{2^n}(b - a) \end{aligned}$$

et donc, par théorème VII.11,  $b_n - a_n \rightarrow 0$ . Les deux suites  $(b_n)_n$  et  $(a_n)_n$  étant adjacentes, elles convergent vers une même limite  $c \in ]a, b[$ . De plus, comme pour tout  $n \geq 0$ ,  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$  on obtient par passage à la limite que  $f(c)^2 \leq 0$  ce qui implique  $f(c) = 0$ , d'où le résultat.  $\square$

✂ **Remarque IX.9.** Dans la démonstration *supra*, on resserre donc petit à petit une "fenêtre" autour du point d'annulation de  $f$ , ce que l'on peut implémenter en python via le code suivant (on parle de **recherche de zéro par dichotomie**) étant donné que la suite  $(c_n)_n$  converge par encadrement vers  $c$ .

```
def dichotomie(f, a, b, p):
    if f(a)*f(b) > 0:
        raise ValueError("f ne s'annule pas")
    while b-a > 10**(-p):
        c = (a+b)/2
        if f(c) == 0:
            return c
        if f(a)*f(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return c
```

✎ **Exercice IX.2.** Démontrer que toute fonction continue de  $[0, 1]$  dans lui-même admet un point fixe, i.e un  $x \in [0, 1]$  tel que  $f(x) = x$ .

➡ **Correction :** Si  $f(0) = 0$  ou  $f(1) = 1$ , c'est terminé. Sinon, posons  $g : x \mapsto x - f(x)$ ; alors  $g(0) = -f(0) < 0$  et  $g(1) = 1 - f(1) > 0$ ; par TVI, il existe  $x \in ]0, 1[$  tel que  $g(x) = 0$ , i.e  $f(x) = x$ .

**Corollaire IX.17.a.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ ; posons  $\alpha = f(a)$  et  $\beta = f(b)$ . Alors :

$$\forall \gamma \in [\alpha, \beta] \text{ (ou } [\beta, \alpha]), \exists c \in [a, b], f(c) = \gamma.$$

*Démonstration.* Appliquer le théorème IX.17 à  $x \mapsto f(x) - \gamma$ .  $\square$

**Corollaire IX.17.b.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$  **strictement monotone**; posons  $\alpha = f(a)$  et  $\beta = f(b)$ . Alors :

$$\forall \gamma \in [\alpha, \beta] \text{ (ou } [\beta, \alpha]), \exists! c \in [a, b], f(c) = \gamma.$$

*Démonstration.* La stricte monotonie entraîne l'injectivité de  $f$  et donc l'unicité de  $\gamma$ .  $\square$

**Corollaire IX.17.c.** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

*Démonstration.* Se rappeler que les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont exactement les convexes et utiliser le corollaire a.  $\square$

**Corollaire IX.17.d** (Théorème des bornes atteintes). Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ . Alors :

- (i)  $f$  admet un maximum  $M$  et un minimum  $m$  atteints sur  $[a, b]$  ;
- (ii)  $f([a, b]) = [m, M]$ .

En particulier, **l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.**

*Démonstration.* Commençons par poser  $M = \sup f([a, b])$  (pourquoi existe-t-il ?). Alors, par caractérisation séquentielle, il existe une suite  $(x_n)_n$  de points de  $[a, b]$  telle que  $f(x_n) \rightarrow M$ . De plus, la suite  $(x_n)_n$  est bornée, donc il existe par théorème de Bolzano–Weierstrass (théorème VII.17) une suite extraite  $(x_{\varphi(n)})_n$  de cette dernière convergeant vers  $c \in [a, b]$ . Par continuité de  $f$  et unicité de la limite, on obtient que  $M = f(c)$ . Un raisonnement similaire nous donne l'existence de  $m = \min f([a, b])$  et nous pouvons alors conclure par le théorème IX.17.  $\square$

▮ **Exemple IX.13.** Le TVI nous permet de démontrer que le cosinus est surjectif sur  $[-1, 1]$ .

## d) Continuité et (stricte) monotonie

**Proposition IX.18.** Toute fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective est strictement monotone.

*Démonstration.* En exercice : raisonner par contraposée via le TVI (théorème IX.17).  $\square$

**Théorème IX.19** (Théorème de la bijection).

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue strictement monotone. Alors :

- (i)  $f$  réalise une bijection de  $I$  vers  $J = f(I)$  ;
- (ii)  $J$  est un intervalle du même type que  $I$  (*i.e* ouvert et fermé le même nombre de fois) ;
- (iii)  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est de même monotonie que  $f$ .

*Démonstration.* Ce résultat est admis.  $\square$

✂ **Remarque IX.10.** Nous avons vu de nombreuses applications de ces résultats dans le chapitre II.

### 3. — Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Une fois n'est pas coutume, tous les résultats de ce chapitre ne faisant pas intervenir d'inégalité se généralisent aux fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  lorsque  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  (on ne parlera pas ici de fonction de variables complexes). En particulier, notons que le TVI ne se généralise pas. On peut par contre passer à la limite dans les parties réelle et imaginaire et caractériser la continuité d'une fonction à valeurs complexes par celle de celles-ci.

▮▮▮ **Exemple IX.14.**  $e^{i\theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$ .