

# Chapitre VII

## Suites numériques

### 1. Généralités

#### a) Notion de suite numérique

Rappelons la définition suivante, à laquelle nous avons fait allusion dans le chapitre V.

**Définition VII.1.** On appelle **suite (numérique)** toute application  $u : \llbracket n_0, \infty \llbracket \rightarrow \mathbb{K}$ , où :

- $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ;
- $n_0 \in \mathbb{N}$  est appelé **rang initial** de la suite.

**Notation.** La suite  $u$  peut être notée  $(u_n)_{n \geq n_0}$  (ou simplement  $(u_n)_n$  si  $n_0 = 0$ ) ; ses **termes**  $u(n)$ , pour  $n \geq n_0$ , peuvent être notés  $u_n$ . Il est **hors de question** d'écrire "la suite  $u_n$ ", ou autres abominations du genre.

☛ **Exemple VII.1.**  $(n^2 + 1)_{n \geq 0}$ ,  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ .

☞ **Remarque VII.1.** Dans les faits, nous disposerons de trois façons de définir une suite numérique :

- de façon **explicite**, comme dans l'exemple *supra* ;
- de façon **implicite**, *e.g.* l'unique suite  $u$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n^2 + 1 = n$  ;
- **par récurrence**, en fixant le premier terme et donnant une relation reliant le terme de rang  $n$  à ceux le précédant (nous verrons plusieurs exemples de ce type de suite au paragraphe 5.-).

Dans la suite du chapitre, nous énoncerons et démontrerons les résultats en partant du principe que  $n_0 = 0$ . Il s'agit d'une simplification arbitraire et aisée à généraliser à toute valeur du rang initial ; nous laissons le soin de le faire à notre bienveillant lecteur. Nous nous intéresserons également dans un premier temps **uniquement aux suites à valeurs réelles** ; la généralisation au cas complexe des résultats ne sera par contre en aucun cas automatique, et nous lui dédions la partie 4.- de ce chapitre.

## b) Suites bornées

**Définition VII.2.** Une suite réelle  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est dite :

- **majorée** si  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$  ;
- **minorée** si  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$  ;
- **bornée** si elle est majorée **et** minorée.

✂ **Remarque VII.2.** Une suite  $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est donc bornée si et seulement si la suite  $(|u_n|)_n$  est majorée.

▣ **Exemple VII.2.** La suite  $(n^2 + 1)_{n \geq 0}$  n'est pas majorée, mais minorée par 1, 0 ou même  $-\frac{42\pi}{13}$ .

## c) Variations

**Définition VII.3.** Une suite réelle  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est dite **croissante** (resp. **décroissante**) si :

$$\forall n, n' \in \mathbb{N} \text{ tels que } n \leq n', u_n \leq u_{n'} \text{ (resp. } u_n \geq u_{n'}).$$

Si l'inégalité ci-dessus est stricte, on parle de monotonie stricte.

✂ **Remarque VII.3.** On peut (doit!) démontrer (par télescopage) que ceci est équivalent à l'étude du signe de  $u_{n+1} - u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

▣ **Exemple VII.3.** Étudions la monotonie de la suite  $\left(\frac{n^2 + 1}{2n + 1}\right)_n$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2 + 1}{2(n+1) + 1} - \frac{n^2 + 1}{2n + 1} \\ &= \frac{(2n+1)((n+1)^2 + 1) - (2n+3)(n^2 + 1)}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{(2n+1)(n^2 + 1) + (2n+1)^2 - (2n+1)(n^2 + 1) - 2(n^2 + 1)}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{(2n+1)^2 - 2(n^2 + 1)}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 - 2}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{2n^2 + 4n - 1}{(2n+3)(2n+1)}. \end{aligned}$$

Le numérateur est un trinôme du second degré en  $n$  dont l'unique racine positive est  $-1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \cong 0.225$ . De fait,  $(u_n)_n$  est croissante à partir de  $n = 1$ .

**Définition VII.4.** Une suite  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est dite **stationnaire** si

$$\exists c \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = c.$$

☞ **Remarque VII.4.** Une suite stationnaire est donc une suite constante à partir d'un certain rang.

☛ **Exemple VII.4.** La suite  $\left(\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor\right)_{n \geq 1}$  est stationnaire; elle est en effet nulle à partir de  $n = 2$ .

☞ **Exercice VII.1.** Démontrer que toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.

☛ **Correction :** Soit  $u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  une suite décroissante. On pose :

$$\mathcal{E} = \{u_n \mid n \geq 0\}$$

l'ensemble des termes de la suite. Il s'agit d'une partie de  $\mathbb{N}$  non vide donc, par axiome **D**,  $\mathcal{E}$  admet un minimum, soit  $m_0 = u_{n_0}$ . Par décroissance, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq m_0$ , ce qui entraîne par minimalité que  $u_n = m_0$ . La suite est donc bien constante à partir du rang  $n_0$  (au moins).

## 2. Limite d'une suite

### a) Limite réelle

**Définition VII.5.** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ ; on dit que **la suite  $(u_n)_n$  converge vers  $\ell$**  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Le réel  $\ell$  est alors appelé **limite** de la suite  $u$ .

**Notation.** On utilisera indifféremment  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ ,  $u_n \rightarrow \ell$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$  ou  $\lim u_n = \ell$ .

Avant d'aller plus loin, analysons la définition de limite. Elle se découpe en trois parties :

- " $\forall \varepsilon > 0$ " nous indique que ce qui va suivre sera vrai quel que soit le  $\varepsilon$  choisi. Ce dernier quantifiera la précision de notre approximation ;
- " $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$ ," signifie que la propriété est vraie à partir d'un certain rang  $N$  ;
- " $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ " nous dit que l'écart entre  $u_n$  et  $\ell$  sera inférieur à la précision choisie.

*In fine*, la définition peut se reformuler de la façon suivante : **quelle que soit la précision choisie,  $u_n$  sera plus proche de  $\ell$  que cette dernière pour  $n$  assez grand.**

▮▮▮ **Exemple VII.5.** Soit  $\varepsilon > 0$ ; alors pour tout  $n \geq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ ,  $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ . Ainsi :

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Définition VII.6.** Une suite convergeant vers une limite **RÉELLE** est dite **convergente**. Dans le cas contraire, elle est dite **divergente**.

▮▮▮ **Exemple VII.6.** La suite  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$  est convergente (vers 0). Nous verrons que la suite  $((-1)^n)_n$  est divergente (sans limite), de même que  $(n^2 + 1)_n$  (limite infinie).

**Proposition VII.1.** Une suite convergente admet exactement une limite.

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{R}^n$  une suite convergente dont on suppose qu'elle admet deux limites  $\ell$  et  $\ell'$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ; alors, par définition de limite :

- $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ ;
- $\exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', |u_n - \ell'| \leq \varepsilon$ .

Ainsi, si on fixe  $n \geq \max(N, N')$ , on a :

$$\begin{aligned} |\ell - \ell'| &= |\ell - \ell' + u_n - u_n| \\ &\leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

En posant  $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell - \ell'|$  on obtient alors :

$$|\ell - \ell'| \leq \frac{2}{3}|\ell - \ell'|$$

ce qui n'est possible que si  $|\ell - \ell'| = 0$ , d'où le résultat. □

**Proposition VII.2.** Une suite convergente est bornée.

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{R}^n$  convergeant vers  $\ell \in \mathbb{R}$ . Alors, en appliquant la définition de limite à  $\varepsilon = 1$ , on obtient :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq 1.$$

La seconde inégalité triangulaire nous livre alors que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, ||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \leq 1$$

et donc  $|u_n| \in [1 - |\ell|, 1 + |\ell|]$ . *In fine*, la suite  $(u_n)_n$  est bornée par

$$\max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|).$$

□

✘ **ATTENTION** : la réciproque est **fausse**, comme nous le verrons un peu plus tard. La suite  $((-1)^n)_n$  est en effet bornée et divergente.

**Proposition VII.3.** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ; alors :

- (i) le produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0 converge vers 0 ;
- (ii) si  $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ , alors  $|u_n| \rightarrow |\ell|$  ;
- (iii)  $u_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |u_n| \rightarrow 0$ .

*Démonstration.*

- (i) Supposons que  $u_n \rightarrow 0$  et soit  $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite bornée par  $M \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors, par définition de limite, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - 0| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

et donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

d'où  $u_n v_n \rightarrow 0$ .

- (ii) Il suffit de remarquer que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|$  et de réinjecter cela dans la définition de limite pour la suite  $(u_n)_n$ .
- (iii) Immédiat via la définition de limite.

□

▮ **Exemple VII.7.** La suite  $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1}$  converge vers 0.

**Proposition VII.4.** Soient  $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telles que :

- $v_n \rightarrow 0$  ;
- $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq v_n$ .

Alors  $u_n \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ ; alors par définition de limite, il existe  $N' \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|v_n| = v_n \geq \varepsilon$ . Ainsi, pour tout  $n \geq \max(N, N')$ , on a :

$$|u_n| \leq v_n \leq |v_n| \leq \varepsilon$$

d'où le résultat.

□

## b) "Limite" infinie

**Définition VII.7.** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ; on dit que  $u$  **tend (ou diverge) vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ )** si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M \text{ (resp. } u_n \leq M \text{)}.$$

**Notation.**  $u_n \rightarrow \pm\infty$  ou  $\lim u_n = \pm\infty$ .

✘ **ATTENTION :** Une suite tendant vers  $\pm\infty$  n'est **pas** convergente.

▣ **Exemple VII.8.** Soit  $q \in ]1, \infty[$  et posons  $h = q - 1$ . Alors, par binôme de Newton, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$q^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Ainsi, si  $M \in \mathbb{R}$ , alors  $q^n \geq M$  dès que  $n \geq \frac{M-1}{h}$  ; de fait  $q^n \rightarrow \infty$ .

✂ **Remarque VII.5.** Une suite divergeant vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) n'est jamais majorée (resp. minorée). La réciproque est par contre **fausse** : considérer la suite  $((-1)^n n)_n$ .

**Proposition VII.5.** Une suite admet au plus une limite, finie ou infinie.

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Si  $u$  est convergente, elle est bornée et donc ne peut admettre une limite infinie et possède une unique limite finie par la proposition VII.1. Dans le cas où  $u_n \rightarrow \infty$ , alors elle ne peut être convergente par définition et  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq 1$  donc  $u_n$  ne peut tendre vers  $-\infty$ . On traite de la même façon le cas  $u_n \rightarrow -\infty$ . □

### c) Opérations sur les limites

Commençons ce paragraphe par rappeler les opérations "étendues" que nous avons mis en place sur  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  dans le chapitre III ; elles nous seront fort utiles pour l'énoncé des résultats de ce paragraphe.

+	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_+^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$xy$	0	$xy$	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$xy$	0	$xy$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

**Proposition VII.6.** Soient  $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $u_n \rightarrow \ell$  et  $v_n \rightarrow \ell'$ . Alors, à condition de ne pas tomber dans un cas d'indétermination, on a :

- (i)  $u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell'$  ;
- (ii) pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda u_n \rightarrow \lambda \ell$  ;
- (iii)  $u_n v_n \rightarrow \ell \ell'$ .

*Démonstration.* Traitons par exemple le cas (i) lorsque  $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ; alors, quitte à prendre le maximum des deux rangs apparaissant dans la définition de limite pour  $u$  et  $v$  comme nous l'avons déjà fait auparavant, on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left( |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right) \wedge \left( |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

et donc, pour tout  $n \geq N$  :

$$\begin{aligned} |u_n + v_n - (\ell + \ell')| &\leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

d'où le résultat. Les autres cas se traitent selon un procédé similaire.  $\square$

**Proposition VII.7.** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et soit  $\ell \in ]0, \infty]$  tel que  $u_n \rightarrow \ell$ . Alors :

- (i)  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > 0$ ;
- (ii)  $\frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{\ell}$ , avec la convention que  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

*Démonstration.*

**Cas 1 :**  $\ell = \infty$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ; alors par définition de limite :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ainsi, pour  $n \geq N$ ,  $u_n > 0$  et :

$$0 < \frac{1}{u_n} \leq \varepsilon$$

ergo  $\frac{1}{u_n} \rightarrow 0$ .

**Cas 2 :**  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors, par définition de limite :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2}.$$

Si  $n \geq N$ ,  $u_n$  est alors strictement positif car compris entre  $\frac{\ell}{2}$  et  $\frac{3\ell}{2}$ . En effet :

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2} \iff u_n - \ell \in \left[ -\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2} \right].$$

De plus, toujours pour  $n \geq N$  :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| &= \left| \frac{u_n - \ell}{u_n \ell} \right| \\ &= \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \ell} \\ &\leq \frac{2|u_n - \ell|}{\ell^2}. \end{aligned}$$

Or par définition de limite, il existe  $N' \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\ell^2 \varepsilon}{2}$$

et donc pour tout  $n \geq \max(N, N')$  on a bien

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| \leq \varepsilon$$

d'où le résultat. □

▮► **Exemple VII.9.** Ceci implique (entre autres) que si  $q \in ]0, 1[$ ,  $q^n \rightarrow 0$ ; en effet  $\frac{1}{q} > 1$  et donc  $\left(\frac{1}{q}\right)^n \rightarrow \infty$ .

**Proposition VII.8.** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite telle que :

- $u_n \rightarrow 0$ ;
- $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > 0$ .

Alors :

$$\frac{1}{u_n} \rightarrow \infty.$$

*Démonstration.* Analogue à celle de la proposition précédente. □

✂ **Remarque VII.6.** Il existe un résultat analogue pour les suites strictement négatives à partir d'un certain rang convergeant vers 0.

✂ **ATTENTION :** l'hypothèse de stricte positivité est **essentielle**. En effet, la suite  $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1}$  converge vers 0 en tant que produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle (proposition VII.3), mais son inverse, la suite  $((-1)^n n)_{n \geq 1}$  n'a pas de limite, comme nous le verrons un peu plus tard.

Le théorème suivant sera énoncé plus proprement et démontré au chapitre IX, mais nous en donnons une version simplifiée en avant-première afin de simplifier votre travail en exercices. Ne me remerciez pas...

**Théorème VII.9** (Composition des limites).

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  admettant pour limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  et soit  $f$  une fonction définie "autour de  $\ell$ " telle que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \ell} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ . Alors :

$$f(u_n) \rightarrow \ell'.$$

▮► **Exemple VII.10.**

- $e^{-n^2} \rightarrow 0, e^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ .

- Posons  $u_0 = 0$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ . Alors, à supposer que cette suite admette une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  (nous le démontrerons plus tard dans l'année), l'unicité de la limite (proposition VII.1) entraîne que  $\ell = \sqrt{1 + \ell}$  et donc  $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ( $\ell$  doit être positive car les termes de la suite  $u$  le sont et  $\ell^2 = 1 + \ell$ ).

#### d) Limites et ordre

**Proposition VII.10.** Soient  $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  convergeant respectivement vers  $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$  telles que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n.$$

Alors :

$$\ell \leq \ell'.$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ ; pour  $n$  assez grand (marre d'écrire les max de choses et autres, vous me pardonnerez probablement; dans le cas contraire, même tarif)  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$  et  $|v_n - \ell'| \leq \varepsilon$ . Ainsi :

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq \ell' + \varepsilon$$

toujours pour  $n$  suffisamment grand. On en déduit que  $\ell \leq \ell' + 2\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , ce qui implique que  $\ell - \ell'$  minore  $\mathbb{R}_+^*$  et donc  $\ell - \ell' \leq \inf \mathbb{R}_+^* = 0$ , d'où le résultat.  $\square$

✘ **ATTENTION** : il n'existe **pas** de résultat analogue pour les inégalités strictes; en effet, pour tout  $n \geq 0$ ,  $n < n + 1$  et pourtant les limites de ces deux quantités sont égales.

**Théorème VII.11** (Existence par encadrement).

Soient  $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et soit  $\ell \in \mathbb{R}$  tels que :

- $u$  et  $w$  convergent vers  $\ell$ ;
- $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Alors :

$$v_n \rightarrow \ell.$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ , alors quitte à prendre le maximum des rangs associés à  $u$  et  $w$  :

$$\exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', (|u_n - \ell| \leq \varepsilon) \wedge (|w_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

Ainsi, pour  $n \geq \max(N, N')$ , on a l'inégalité :

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$$

qui nous permet de conclure que  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$  et d'obtenir la convergence désirée.  $\square$

▮▮▮ **Exemple VII.11.** La suite  $\left(\frac{(-1)^n + 2}{n}\right)_{n \geq 1}$  converge vers 0 ; en effet, pour tout  $n \geq 1$  on a :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n + 2}{n} \leq \frac{3}{n}.$$

Nous disposons également d'une "version infinie" de ce théorème, que nous énonçons dans le cas "par majoration" (limite  $+\infty$ ) en laissant au lecteur le soin d'énoncer et démontrer son analogue "par minoration".

**Proposition VII.12.** Soient  $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telles que :

- $u_n \rightarrow \infty$  ;
- $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n$ .

Alors :

$$v_n \rightarrow \infty.$$

🔗 **Exercice VII.2.** En utilisant une intégrale, démontrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

### e) Suites extraites

**Définition VII.8.** Soit  $E$  un ensemble et soit  $u \in E^{\mathbb{N}}$  ; on appelle **suite extraite** de  $u$  toute suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_n$ , où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction strictement croissante.

✂ **Remarque VII.7.** Extraire une suite revient donc à ne "garder" que les termes indexés par l'image  $\varphi(\mathbb{N})$ .

▮▮▮ **Exemple VII.12.**

- $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  sont des suites extraites de  $u$ , ne contenant respectivement que ses termes d'indices pairs et impairs. De même,  $(u_{n^2})_n$  est une suite extraite de  $u$ .
- Si  $u = ((-1)^n)_n$ ,  $(u_{2n})_n$  est la suite constante égale à 1.

**Proposition VII.13.** Soient  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite admettant une limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  ; alors ses suites extraites tendent également vers  $\ell$ .

*Démonstration.* Traitons par exemple le cas  $\ell \in \mathbb{R}$ . Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction strictement croissante ; il est alors aisé de démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on a alors par définition de limite que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$$

car  $\varphi(n) \geq n \geq N$ , d'où le résultat.  $\square$

▣► **Exemple VII.13.** Depuis le temps que nous vous le promettons : la suite  $((-1)^n)_n$  n'admet pas de limite. En effet, la suite de ses termes d'indices pairs est constante égale à 1 et celle de ses termes impairs à  $-1$  ; de fait elles n'ont pas même limite et donc la suite initiale ne peut admettre de limite.

✂ **Remarque VII.8.** L'exemple ci-dessus est loin d'être anecdotique ; cette proposition nous servira principalement démontrer que des suites n'admettent **pas** de limite.

**Proposition VII.14.** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite telle que  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  tendent vers une même limite  $\ell$ . Alors :

$$u_n \rightarrow \ell.$$

✂ **Remarque VII.9.** Le résultat reste vrai si  $(u_{3n})_n$ ,  $(u_{3n+1})_n$  et  $(u_{3n+2})_n$  tendent vers la même limite (et ainsi de suite).

*Démonstration.* Traitons le cas  $\ell \in \mathbb{R}$  et fixons  $\varepsilon > 0$ . Alors, quitte à remplacer  $N$  par le maximum des rangs associés aux extractions paire et impaire, on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, (|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon) \wedge (|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon).$$

De fait, pour tout  $n \geq 2N + 1$ , on a  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ , d'où le résultat.  $\square$

### 3. – Théorèmes d'existence de limites

#### a) Le cas monotone

**Notation.** Si  $(u_n)_n$  est une suite réelle majorée, on notera  $\sup_{n \in \mathbb{N}}(u_n)$  la borne supérieure de l'ensemble  $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . On peut bien sur étendre cette notation au cas de la borne inférieure de l'ensemble des termes d'une suite minorée.

**Théorème VII.15** (Limite monotone).

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite croissante. Alors :

- si  $u$  est majorée,  $u$  converge vers  $\sup_{n \in \mathbb{N}}(u_n)$  ;
- sinon,  $u$  diverge vers  $+\infty$ .

✂ **Remarque VII.10.** Un résultat symétrique existe pour les suites décroissantes.

*Démonstration.*

**Cas 1 :**  $u$  est majorée. Alors l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée : elle admet donc une borne supérieure  $\ell$ . Soit  $\varepsilon > 0$  ; par définition de supremum,  $\ell - \varepsilon$  ne majore pas  $\mathcal{E}$  et donc il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $u_N \geq \ell - \varepsilon$ . Or,  $u_N \leq \ell$  donc  $|u_N - \ell| \leq \varepsilon$  et comme la suite  $u$  est croissante, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq u_N \geq \ell - \varepsilon$ , ergo

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

d'où le résultat.

**Cas 2 :**  $u$  n'est pas majorée. Soit  $M \in \mathbb{R}$  ; comme  $u$  n'est pas majorée, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $u_N \geq M$ . Or,  $u$  est croissante donc :

$$\forall n \geq N, u_n \geq u_N \geq M,$$

d'où le résultat. □

## b) Adjacence

**Proposition VII.16.** Soient  $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  deux suites telles que :

- l'une est croissante, l'autre décroissante ;
- $u_n - v_n \rightarrow 0$ .

Alors  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  convergent vers la même limite.

*Démonstration.* Soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux telles suites, la première étant croissante, la seconde décroissante. Il est clair que dans cette configuration, comme  $u_n - v_n \rightarrow 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$  (car sinon la suite  $(u_n - v_n)_n$  serait strictement positive, croissante et convergente vers 0). La suite  $(u_n)_n$  est donc croissante et majorée par  $v_0$  ; elle converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Ensuite, pour tout  $n \geq 0$  on a :

$$v_n = (v_n - u_n) + u_n \rightarrow 0 + \ell$$

d'où le résultat. □

**Vocabulaire.** Deux telles suites sont dites *adjacentes*.

▣► **Exemple VII.14.** Posons, pour  $n \geq 1$  :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

Soit  $n \geq 1$  ; alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{2n+2} - u_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

donc  $v$  est croissante ; on montre de même que  $w$  est décroissante et

$$\forall n \geq 1, v_n - w_n = \frac{-1}{2n+1} \rightarrow 0$$

donc les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes.

▮▮▮ **Exemple VII.15.** Les suites  $v$  et  $w$  de l'exemple précédent sont donc convergentes vers une même limite et donc, par proposition VII.14, la suite  $u$  converge vers cette même limite (nous verrons plus tard qu'il s'agit de  $\ln(2)$ ).

### c) Théorème de Bolzano–Weierstrass

Le résultat donnant son nom à ce paragraphe est nommé d'après Bernard Bolzano (autrichien, 1781—1848) et Karl Weierstrass (allemand, 1815—1897).

**Théorème VII.17** (Bolzano–Weierstrass).

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

La démonstration de ce théorème, bien qu'hors programme, nous est tout à fait accessible ; elle repose sur une dichotomie.

▮▮▮ **Exemple VII.16.** Il existe une fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que la suite  $(\cos(\varphi(n)))_n$  converge. À méditer : les  $\varphi(n)$  forment une **suite d'entiers strictement croissante**...

## 4. Suites à valeurs complexes

### a) Considérations liminaires

Nous avons défini au début de ce chapitre la notion de suite numérique, englobant les suites réelles et complexes. En préambule au présent paragraphe, notons que si  $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  est une suite à valeurs complexes, on peut lui associer les suites **réelles**  $(\operatorname{Re}(z_n))_n$ ,  $(\operatorname{Im}(z_n))_n$  et  $(|z_n|)_n$ .

✘ **ATTENTION** : la suite  $(\overline{z_n})_n$  est quant à elle à valeurs complexes.

**Définition VII.9.** Une suite complexe  $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  est dite **bornée** si la suite  $(|z_n|)_n$  est majorée.

✘ **ATTENTION** : on ne peut pas parler de suite complexe majorée ou minorée...

▮▮▮ **Exemple VII.17.** Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , la suite  $(e^{in\theta})_n$  est bornée.

**Proposition VII.18.** Soit  $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ; alors :

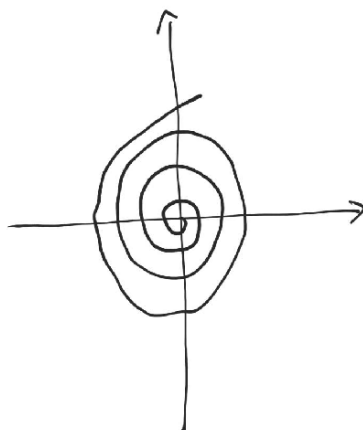
$$\begin{array}{c} (z_n)_n \text{ est bornée} \\ \iff \\ (\operatorname{Re}(z_n))_n \text{ et } (\operatorname{Im}(z_n))_n \text{ sont bornées.} \end{array}$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence des majorations des parties réelles et imaginaires par le module vues dans le chapitre VI.  $\square$

## b) Limites

La définition de limite finie se généralise sans problème aux suites complexes (lire la valeur absolue comme un module) ; la convergence d'une suite complexe est alors équivalente à la convergence des suites partie réelle et partie imaginaire associées.

✘ **ATTENTION** : on ne parle **jamais** de limite infinie pour une suite complexe ; pour comprendre pourquoi, considérez la suite  $(2^n e^{in})_n$  qui diverge "en spirale" : son module tend vers l'infini alors que son argument parcourt  $[0, 2\pi[$  de façon périodique.



La plupart des résultats énoncés dans les paragraphes précédents se généralisent aux suites réelles sans avoir à en adapter les démonstrations, en particulier :

- les opérations sur les limites ;
- les théorèmes liés aux suites extraites, dont le théorème de Bolzano–Weierstrass (VII.17).

Par contre, en raison de l'absence d'ordre naturel sur  $\mathbb{C}$ , **aucun théorème en lien avec les inégalités ou la monotonie ne se généralise au cas complexe.**

## 5. Zoologie des suites usuelles

### a) Suites arithmétiques, suites géométriques

**Définition VII.10.** Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et soit  $a \in \mathbb{C}$ . On dit que  $(u_n)_n$  est une suite...

- .. **arithmétique de raison**  $a$  si  $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + a$  ;
- .. **géométrique de raison**  $a$  si  $\forall n \geq 0, u_{n+1} = au_n$ .

Ces suites ont été étudiées en long, en large et en travers en terminale. Rappelons tout de même les résultats suivants :

- si  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $a \in \mathbb{C}$ , alors son terme général est donné par la formule suivante :

$$\forall n \geq 0, u_n = u_0 + an$$

et sa somme par :

$$\forall n \geq 0, \sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_0 + a \frac{n(n+1)}{2}.$$

— si  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $a \in \mathbb{C}$ , alors son terme général est donné par la formule suivante :

$$\forall n \geq 0, u_n = u_0 a^n$$

et sa somme par :

$$\forall n \geq 0, \sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} u_0(n+1) & \text{si } a = 1 \\ u_0 \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition VII.19** (Nature des suites géométriques). Soit  $q \in \mathbb{C}$ ; alors :

- si  $|q| < 1$ , la suite  $(q^n)_n$  converge vers 0;
- si  $|q| > 1$ , la suite  $(q^n)_n$  diverge et  $|q^n| \rightarrow \infty$ ;
- si  $|q| = 1$  et  $q \neq 1$ , la suite  $(q^n)_n$  diverge.

*Démonstration.* Les cas  $|q| < 1$  et  $|q| > 1$  ont déjà été traités dans le cas réel; la démonstration s'adapte aisément au cas complexe. Supposons à présent que  $|q| = 1$  et  $q \neq 1$  (i.e que  $q \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ ); alors, en passant à la limite dans l'égalité  $u_{n+1} = qu_n$ , on obtient :

$$\ell = q\ell$$

ce qui est absurde car  $q \neq 1$  et  $|\ell| = \lim |q^n| = 1$  donc  $\ell \neq 0$ . □

**Définition VII.11.** Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  tels que  $a \neq 1$  et  $b \neq 0$ ; on appelle **suite arithmético-géométrique** associée à  $a$  et  $b$  toute suite  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = au_n + b.$$

La méthode d'étude d'une suite arithmético-géométrique est relativement aisée à mettre en œuvre; on cherche (par analyse-synthèse) à trouver les suites  $(v_n)_n = (u_n - \nu)_n$  (avec  $\nu \in \mathbb{C}$ ) géométriques de raison  $a$ . Cela signifie que, pour  $n \geq 0$  on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} = av_n &\Leftrightarrow u_{n+1} - \nu = a(u_n - \nu) \\ &\Leftrightarrow au_n + b - \nu = au_n - a\nu \\ &\Leftrightarrow \nu = \frac{b}{1-a}. \end{aligned}$$

De cette façon, on obtient que, pour tout  $n \geq 0$  :

$$v_n = v_0 a^n$$

i.e

$$u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}.$$

## b) Récurrences linéaires d'ordre 2

On se fixe dans cette partie  $a, b \in \mathbb{C}$  et on cherche à déterminer les suites complexes  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  définies par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{C} \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases} .$$

Commençons par supposer la suite  $u$  géométrique de raison  $q \in \mathbb{C}^*$  ; on aurait alors l'équation, pour  $n \geq 0$  :

$$u_0 q^{n+2} = u_0 q^{n+1} + u_1 q^n$$

i.e

$$u_0 q^n (q^2 - aq - b) = 0 .$$

Il apparaît ainsi que la raison  $q$  de notre suite doit être racine du polynôme  $X^2 - aX - b$ . Ceci nous donne l'intuition du résultat suivant.

**Proposition VII.20.** Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  et soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{C} \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases} .$$

Considérons l'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence, à savoir :

$$X^2 = aX + b . \quad (\mathbf{E} : \text{VII.1})$$

Alors :

- si  $(\mathbf{E} : \text{VII.1})$  admet deux racines  $q$  et  $q'$ , le terme général de la suite  $u$  est donné par :

$$\forall n \geq 0, u_n = \alpha q^n + \beta q'^n$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  à déterminer à l'aide de  $u_0$  et  $u_1$ .

- si  $(\mathbf{E} : \text{VII.1})$  admet un unique racine  $q$ , le terme général de la suite  $u$  est donné par :

$$\forall n \geq 0, u_n = \alpha q^n + \beta n q^n$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  à déterminer à l'aide de  $u_0$  et  $u_1$ .

*Démonstration.* Par récurrence double. □

✂ **Remarque VII.11.** Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont à déterminer via la système :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_1 = \alpha q + \beta q' \end{cases}$$

dans le premier cas et

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = (\alpha + \beta)q \end{cases}$$

dans le second.

▣► **Exemple VII.18.**

- L'expression trouvée pour la suite de Fibonacci dans le chapitre I peut être retrouvée par cette méthode. Rappelons qu'il s'agit de la suite définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

- Étudions la suite  $(u_n)_n$  définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, u_{n+2} = -u_n.$$

Son équation caractéristique étant  $X^2 + 1 = 0$ , on sait que son terme général sera de la forme, pour  $n \geq 0$

$$u_n = \alpha i^n + \beta (-i)^n.$$

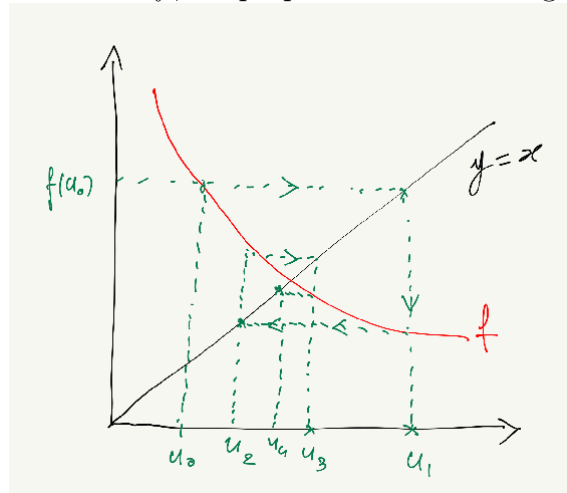
À l'aide des valeurs de  $u_0$  et  $u_1$ , on trouve que  $\alpha = \frac{1-i}{2}$  et  $\beta = \frac{1+i}{2}$ .

### c) Suite récurrentes "générales"

Dans le cas général, une suite récurrente (du premier ordre) sera définie par la donnée de son premier terme  $u_0 \in I$  (avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ) et une relation du type  $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$ , avec  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (généralement continue).

La clé de l'étude d'une telle suite est en général de faire usage des méthodes suivantes :

- si  $f$  est continue et que  $u_n \rightarrow \ell$ , alors d'après le théorème VII.9, on a  $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ . On en déduit que  $\ell = f(\ell)$  en utilisant la relation de récurrence, ce qui permet de déterminer ou de conjecturer la limite éventuelle de  $u$ ;
- la remarque *supra* permet d'affirmer que si convergence il y a, elle se fait vers un point fixe de la fonction  $f$ , ce qui peut être visualisé graphiquement ;



- pour déterminer la monotonie éventuelle d'une telle suite, il nous faudra étudier le signe de la fonction :  $x \mapsto f(x) - x$  sur  $I$ . Pour que ceci ait un sens, il est **impératif** que l'intervalle  $I$  soit **stable** par  $f$ , *i.e* que  $f(I) \subset I$ . Si monotonie il y a, la limite prospective issue de la recherche de point fixe fournira naturellement le minorant/majorant requis pour conclure.

✘ **ATTENTION** : la monotonie de  $f$  n'entraîne **en aucun cas** celle de la suite  $(u_n)_n$ .

✎ **Exercice VII.3.** Étudier la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ .

➔ **Correction :** On vérifie aisément que l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$  est stable par la fonction  $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ , ce qui entraîne que la suite  $u$  est à valeurs strictement positives. De fait et par continuité de  $f$ , si  $(u_n)_n$  converge, sa limite  $\ell$  est une solution positive de l'équation  $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ , qui n'a pas de solution. De fait, cette suite est divergente. De plus, comme  $\forall n \geq 0, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ , on a que la suite  $u$  est strictement croissante et donc diverge vers  $+\infty$ .

## 6. Retour sur la topologie du corps des réels

Dans ce paragraphe, nous revenons sur certains résultats évoqués dans le chapitre III et les démontrons/complétons.

### a) Caractérisation séquentielle des bornes

**Proposition VII.21.** Soit  $X$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Alors :

- si  $X$  est majorée, il existe une suite  $u \in X^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $\sup(X)$  ;
- sinon, il existe une suite  $u \in X^{\mathbb{N}}$  divergeant vers  $+\infty$ .

✂ **Remarque VII.12.** Une fois n'est pas coutume, il existe un résultat symétrique relatif aux bornes inférieures et aux parties minorées.

*Démonstration.*

**Cas 1 :  $X$  est majorée.** Alors  $M = \sup(X)$  existe dans  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $n \geq 1$ , la définition de supremum entraîne que :

$$\exists, x_n \in X, M - x_n \leq \frac{1}{n}.$$

Comme  $M$  majore  $X$ , alors :

$$\forall n \geq 1, 0 \leq |x_n - M| \leq \frac{1}{n}$$

ce qui nous permet de déduire, par théorème d'encadrement des limites (VII.11), que  $x_n \rightarrow M$ .

**Cas 2 :  $X$  n'est pas majorée.** Alors dans ce cas, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n \in X$  tel que  $n \leq x_n$  ; la suite  $(x_n)_n$  diverge alors vers l'infini. □

On déduit de ce résultat le corollaire suivant, déjà rencontré sous le nom de proposition III.8.

**Proposition VII.22** (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure). Soit  $A \subset \mathbb{R}$  et soit  $M \in \mathbb{R}$ ; alors :

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M \end{cases} .$$

## b) Densité

**Définition VII.12.** Une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est dite **dense** si pour tout intervalle  $I$  non vide ni réduit à un point de  $\mathbb{R}$ , l'intersection  $I \cap X$  est non vide.

▮► **Exemple VII.19.** Nous avons vu dans le chapitre III que  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  étaient des parties denses de  $\mathbb{R}$ . Notons que c'est également le cas de  $\mathbb{R} \dots$

**Proposition VII.23.** [Caractérisation séquentielle de la densité] Soit  $X \subset \mathbb{R}$ ; alors :

$$\begin{aligned} X \text{ est une partie dense de } \mathbb{R} \\ \iff \\ \forall x \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x. \end{aligned}$$

*Démonstration.*

(↓) Soit  $x \in \mathbb{R}$  et soit  $n \geq 1$ ; alors par densité

$$X \cap \left[ x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \neq \emptyset$$

et donc il existe  $x_n$  dans cette intersection. Il est clair par encadrement que la suite  $(x_n)_n$  converge vers  $x$ .

(↑) Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$  différent de ses bornes. Alors, par convexité de  $I$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I :$$

Or, par hypothèse, il existe une suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $X$  convergeant vers  $x_0$ , ce qui entraîne que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

et donc, en particulier,  $x_N \in I \cap X$ .

□

✌ **Remarque VII.13.** En utilisant ce résultat et l'approximation à  $10^{-n}$  près vue dans le chapitre III, on peut démontrer que l'ensemble des nombres décimaux est dense dans  $\mathbb{R}$ .