Chapitre VI

Nombres complexes

1.– Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

a) C'est quoi ?

L'ensemble $\mathbb{C} = \{a+ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ est muni d'une structure de corps (*cf.* chapitre VIII). Il n'admet toutefois pas d'ordre "naturel" comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$. Plus précisément, nous baserons ce chapitre sur le résultat (admis) suivant.

Théorème VI.1 (Corps des nombres complexes)**.**
Il existe un "unique" (à isomorphisme près) corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ tel que :

(A) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ avec préservation de l'addition et de la multiplication ;

(B) il existe $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.

Dans ce cas, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a+ib$. On appelle a (resp. b) la **partie réelle** (resp. **partie imaginaire**) de z, notée $\mathrm{Re}(z)$ (resp. $\mathrm{Im}(z)$).

Notation. On notera $i\mathbb{R}$ l'ensemble des **imaginaires purs**, à savoir $i\mathbb{R} = \{ib \,|\, b \in \mathbb{R}\}$. On a alors immédiatement que $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

✌ **Remarque VI.1.**

— **Attention :** si $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$. De plus $\mathbb{C} \neq \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ (penser à $1 + i$, par exemple).

— Si $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Re}(z + \lambda z') = \mathrm{Re}(z) + \lambda \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z + \lambda z') = \mathrm{Im}(z) + \lambda \mathrm{Im}(z')\,.$$

— Si $z \in \mathbb{C}$, alors $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$.

— Si $z, z' \in \mathbb{C}$ alors on a, en posant $z = a + ib$ et $z' = c + id$, les formules suivantes :

$$z + z' = (a + c) + i(b + d) \qquad \text{et} \qquad zz' = ac - bd + i(ad + bc)\,.$$

— Le choix du nombre complexe i est arbitraire : on pourrait tout à fait choisir son opposé et développer exactement la même théorie.

— Les formules et techniques de calculs vues dans le chapitre II se généralisent, comme nous l'avions divulgâché, aux nombres complexes.

b) Lien au plan $\mathbb{R}^2$

On peut identifier $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$ via la bijection suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2 \\ z &\mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \end{aligned}$$

de réciproque

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x + iy \end{aligned} \quad .$$

Vocabulaire.
- Si $A \in \mathbb{R}^2$, le nombre complexe $\psi(A)$ est appelé **affixe** de A.
- Si $z \in \mathbb{C}$, le point du plan $\varphi(z)$ est appelé **image** de z.

✍ **Exercice VI.1.** Placer dans le plan les points d'affixes $1, i, 1 + i, 1 - i$ et $\dfrac{i}{2}$.

✌ **Remarque VI.2.** Géométriquement, on peut interpréter la somme de deux nombres complexes comme une translation (*cf.* paragraphe 4.⁻).

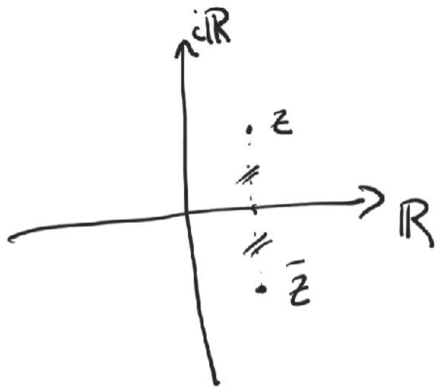
c) Conjugaison

Définition VI.1. Soit $z \in \mathbb{C}$; on appelle **conjugué** de z le nombre complexe

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z) \; .$$

➠ **Exemple VI.1.** $\overline{1 + 4i} = 1 - 4i$.

✌ **Remarque VI.3.** Géométriquement, l'image de $\overline{z}$ est le symétrique de celle de z par rapport à la droite rélle.



Proposition VI.2. Soit $z \in \mathbb{C}$; alors :

(i) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$;

(ii) $\overline{\overline{z}} = z$;

(iii) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$;

(iv) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

Démonstration. Il s'agit de calculs immédiats. Pour (iii) et (iv), utiliser (i). □

✌ **Remarque VI.4.** Les points (iii) et (iv) sont particulièrement utiles en pratique pour démontrer qu'un nombre complexe est en fait réel ou imaginaire pur.

Proposition VI.3. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

(i) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

(ii) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;

(iii) **si** $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Démonstration. Calculs, calculs, toujours des calculs...Le seul point légèrement technique est le (iii) ; il faut pour celui–ci remarquer que :

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} \\ &= \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} \text{ par (ii)}\end{aligned}$$

Or, comme $z' \times \frac{1}{z'} = 1$, on déduit du point (ii) en conjugant à gauche et à droite de l'éqalité que

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$$

d'où le résultat. □

✍ **Exercice VI.2.** Donner une description explicite de l'ensemble

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \;\middle|\; \frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R} \right\} .$$

➥ **Correction :** *Soit* $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ *; alors :*

$$\begin{aligned}\frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)} = -\frac{z+i}{z-i} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i} = -\frac{z+i}{z-i} \\ &\Leftrightarrow (\overline{z}-i)(z-i) = -(\overline{z}+i)(z+i) \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - i(z+\overline{z}) - 1 = -z\overline{z} - i(z+\overline{z}) + 1 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} = 1 .\end{aligned}$$

Ainsi, E est l'ensemble des complexes $z = x + iy$ tels que $z\overline{z} = 1$, *i.e* tels que $x^2 + y^2 = 1$. Il s'agit donc du cercle unité privé de i.

d) Module

Proposition VI.4. Soit $z \in \mathbb{C}$; alors $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}_+$. □

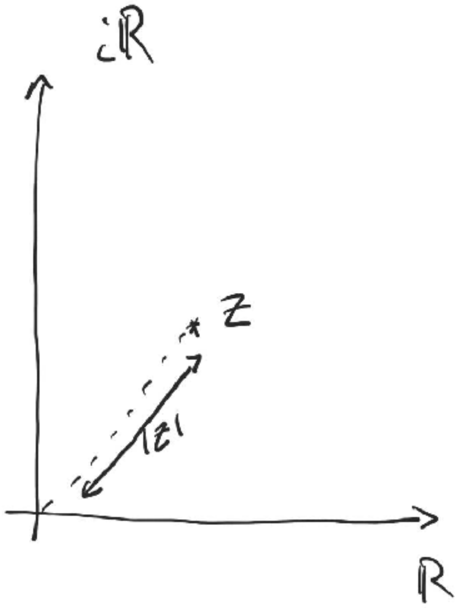
Définition VI.2. Soit $z \in \mathbb{C}$; on appelle **module** de z la quantité $\sqrt{z\overline{z}}$.

Notation. $|z|$

➠ **Exemple VI.2.** $|1+i| = \sqrt{2}$.

✌ **Remarque VI.5.**

— Géométriquement, le module de $z \in \mathbb{C}$ correspond à la distance entre le point d'affixe z et l'origine du plan $\mathbb{R}^2$.



Plus généralement, si $z, z' \in \mathbb{C}$, la quantité $|z - z'|$ est égale à la distance entre les points d'affixes respectives z et z' dans $\mathbb{R}^2$.

— Si $\omega \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, une équation du cercle $\mathscr{C}(\omega, R)$ de centre ω et de rayon R est donc :

$$|z - \omega| = R \qquad (\mathbf{E}:\text{VI.1})$$

ou

$$(\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(\omega)^2 + (\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(\omega))^2 = R^2 \,. \qquad (\mathbf{E}:\text{VI.2})$$

— De la même façon, les inéquations du type $|z - \omega| \leq R$ ont pour ensemble solutions les affixes des points d'un disque de $\mathbb{R}^2$.

Proposition VI.5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

(i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

(ii) $|z| = |\overline{z}|$;

(iii) $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

Démonstration. Les points (i) et (ii) découlent immédiatement de la définition. Pour le point (iii), posons $z = x + iy$; alors :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \geq x$$

et symétriquement avec la partie imaginaire, d'où le résultat. □

Proposition VI.6. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

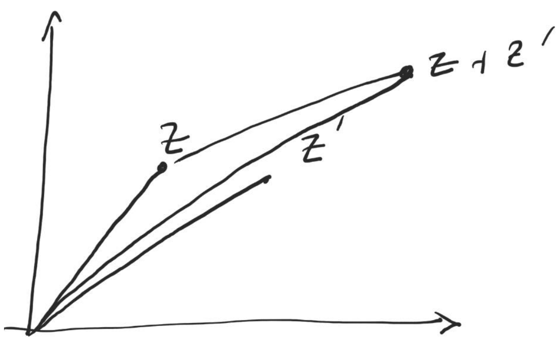
(i) $|zz'| = |z||z'|$;

(ii) si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$;

(iii) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ **[inégalité triangulaire 1]** ;

(iv) $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$ **[inégalité triangulaire 2]**.

✌ **Remarque VI.6.** Géométriquement, l'inégalité triangulaire 1 nous indique que le plus court chemin entre deux points du plan est la ligne droite : la distance du parcours $(0, z, z + z')$ est supérieure à celle du parcours $(0, z + z')$.



Démonstration.

(i) Découle de la définition et des propriétés de la conjugaison.

(ii) Idem.

(iii) Si $z' = 0$, l'inégalité est triviale. Sinon, posons $u = \dfrac{z}{z'}$ et montrons que $|1 + u| \leq 1 + |u|$. Pour ce faire, nous allons comparer les carrés de ces deux quantités :

$$\begin{aligned}|1+u|^2-(1+|u|)^2 &= (1+u)(1+\overline{u})-1-2|u|-|u|^2\\ &= u+\overline{u}-2|u|\\ &= 2(\operatorname{Re}(u)-|u|)\\ &\leq 0\,.\end{aligned}$$

Ne nous reste plus qu'à multiplier cette inégalité par $|z'|$ pour obtenir le résultat.

(iv) Échanger les rôles de z et z' ne change rien à l'expression souhaitée : nous pouvons donc supposer, quitte à échanger z et z', que $|z| \geq |z'|$. Remarquons alors que $z = z - z' + z'$; certes, me direz vous...Mais, en utilisant la première inégalité triangulaire, on obtient :

$$|z| = |z-z'+z'| \leq |z-z'| + |z'|$$

et donc $|z| - |z'| \leq |z-z'|$. Comme $|z| \geq |z'|$, on a bien :

$$||z|-|z'|| = |z|-|z'| \leq |z-z'|\,.$$

□

✌ **Remarque VI.7. Cas d'égalité dans la première inégalité triangulaire.** Pour caractériser les complexes z, z' tels que $|z+z'| = |z|+|z'|$, procédons par analyse–synthèse.

Analyse. Supposons trouvés $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $|z+z'| = |z|+|z'|$. Si $z' \neq 0$, on pose $u = \dfrac{z}{z'}$ et on obtient

$$|1+u| = 1+|u|$$

ce qui est équivalent, nous venons de le voir dans la démonstration de l'inégalité triangulaire, à :

$$\operatorname{Re}(u) = |u|\,.$$

Ceci entraine, comme $|u| = \sqrt{\operatorname{Re}(u)^2+\operatorname{Im}(u)^2}$, que $u \in \mathbb{R}_+$, *i.e* $\dfrac{z}{z'} = u \in \mathbb{R}_+$.

Synthèse. Si $z' = 0$, l'égalité est trivialement vérifiée. Si $z = uz'$, avec $u \in \mathbb{R}_+$, alors :

$$\begin{aligned}|z'+z| &= |z'+uz'|\\ &= |(1+u)z'|\\ &= |1+u||z'|\\ &= (1+u)|z'|\\ &= |z'|+|u||z'|\\ &= |z'|+|z|\,.\end{aligned}$$

En conclusion, nous venons de démontrer le résultat suivant :

$$|z+z'| = |z|+|z'| \iff (z'=0) \vee (\exists\, u \in \mathbb{R}_+,\ z = uz')\,.$$

2.‾ Trigonométrie, le retour

a) Nombres complexes de module 1

Ce paragraphe est, vous l'aurez deviné, dédié à l'étude de l'ensemble des nombres complexes de module 1, à savoir :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*.$$

Proposition VI.7. L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par multiplication et inverse.

Démonstration. Le module du produit est le produit des modules, idem pour l'inverse. Or $1 \times 1 = \frac{1}{1} = 1 \ldots$ □

Remarque VI.8.
- Nous dirons dans le chapitre VIII que $\mathbb{U}$ possède, de par ces stabilités, une structure de groupe.
- Géométriquement, $\mathbb{U}$ correspond au cercle unité de $\mathbb{R}^2$.
- Si $z \in \mathbb{U}$, alors $|z|^2 = z\overline{z} = 1$ donc $\frac{1}{z} = \overline{z}$. En effet, si $z \in \mathbb{C}^*$, on a
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

Définition VI.3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$; on **pose**

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\,.$$

✖ **Attention :** Il s'agit la d'une **notation** ; n'imaginons pas que ces quantités héritent de toutes les propriétés de l'exponentielle. Pensez à la positivité ...

Exemple VI.3.
- $e^{i\times 0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$; incidemment, notons que $1 = e^0$, ce qui est rassurant pour notre santé mentale à tous.
- $e^{2i\pi} = 1$;
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$;
- $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Proposition VI.8. On a l'égalité ensembliste suivante :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Remarque VI.9. Ce résultat est parfois appelé **paramétrage** du cercle unité ; en effet, nous décrivons ce dernier comme l'image de la fonction

$$f : \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto e^{i\theta} \end{aligned}\,.$$

Démonstration. Montrons deux inclusions.

($\supset$) Soit $\theta \in \mathbb{R}$; alors
$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} = 1$$
donc $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

($\subset$) Soit $z = x + iy \in \mathbb{U}$; alors $x^2 + y^2 = 1$, ce qui entraîne que le point (x, y) se situe sur le cercle trigonométrique (ou unité) de $\mathbb{R}^2$. De fait, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$. *In fine*, $z = e^{i\theta}$.

$\square$

Proposition VI.9. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$;

(ii) $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$;

(iii) $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$;

(iv) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$;

(v) $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0\,[2\pi]$;

(vi) $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\,[2\pi]$.

Démonstration.

(i)
$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= e^{i(\theta+\theta')}\,. \end{aligned}$$

(ii) L'égalité avec le conjugué est triviale ; le lien avec l'inverse découle du fait que si $z \in \mathbb{U}$, alors $|z|^2 = z\overline{z} = 1$ donc $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

(iii) Découle des points (i) et (ii).

(iv) Par récurrence à partir des points (i) et (iii).

(v)
$$\begin{aligned} e^{i\theta} = 1 &\Leftrightarrow \cos(\theta) + i\sin(\theta) = 1 \\ &\Leftrightarrow (\cos(\theta) = 1) \wedge (\sin(\theta) = 0) \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv 0\,[2\pi]\,. \end{aligned}$$

(vi) Découle des points (iii) et (iv).

$\square$

✌ **Remarque VI.10.** En conséquence, l'application
$$\begin{aligned} \widehat{f} : [0, 2\pi[&\to \mathbb{U} \\ \theta &\mapsto e^{i\theta} \end{aligned}\quad.$$
est une bijection. Topologiquement, $\mathbb{U}$ est obtenu en "raccordant" entre elles les extrémités de $[0, 2\pi[$.

Le résultat qui suit est attribué à Leonhard Euler (mathématicien suisse, 1707—1783) et possède de nombreuses applications sur lesquelles nous reviendront ultérieurement.

Proposition VI.10 (Formules d'Euler)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$; alors :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} .$$

Démonstration. Découle immédiatement des formules liant parties réelle et imaginaire au conjugué. □

✌ **Remarque VI.11.** Toute ressemblance avec le (co)sinus hyperbolique est brutalement non fortuite.

La formule qui suit doit son nom au mathématicien français Abraham de Moivre (1667—1754), qui passa la majeure partie de sa vie exilé en Angleterre en raison de sa foi protestante.

Proposition VI.11 (Formule de Moivre)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) .$$

Démonstration. Triviale une fois que l'on a passé le terme de gauche sous forme exponentielle. □

La question que chacun d'entre vous doit (peut–être) se poser est la suivante : ces formules sont bien jolies (et encore…), mais quelle est donc leur utilité ? *Oh, sweet summer child…*

◇ Linéarisation

Le premier usage reconnu des ces formules est la linéarisation d'expressions trigonométriques. Par exemple, si $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos(\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} \\ &= \frac{2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)}{8} \\ &= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta) .\end{aligned}$$

De façon plus générale, si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(\theta)^n &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ik\theta}e^{-i(n-k)\theta} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(2k-n)\theta} .\end{aligned}$$

Or, $\cos(\theta)^n \in \mathbb{R}$; il est donc égal à sa partie réelle, *i.e*

$$\begin{aligned}\cos(\theta)^n &= \mathrm{Re}(\cos(\theta)^n) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(2k-n)\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \mathrm{Re}(e^{i(2k-n)\theta}) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \cos((2k-n)\theta) .\end{aligned}$$

Cette formule (et son analogue pour le sinus) n'est évidemment pas à apprendre par coeur, mais à savoir retrouver.

◇ "Délinéarisation"

À l'inverse, la formule de Moivre nous donne, si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, que :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta)+i\sin(n\theta) &= (\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(\theta)^{n-k}i^k\sin(\theta)^k .\end{aligned}$$

En passant à la partie réelle, qui ne conservera ici que les termes pairs de la somme, nous obtenons que :

$$\cos(n\theta) = \sum_{0\leq 2p\leq n}\binom{n}{2p}\cos(\theta)^{n-2p}(-1)^p\sin(\theta)^{2p}$$

car $i^{2p} = (i^2)^p = (-1)^p$. Une formule analogue peut évidemment être obtenue pour le sinus en passant à la partie imaginaire.

◇ Calculs de sommes

Pour finir ce musée des horreurs calculatoires, intéressons nous au calcul, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, des sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) .$$

L'idée naturelle ici est de calculer

$$\begin{aligned} S_n + iT_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i\sin(k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \,. \end{aligned}$$

En effet, on reconnait la somme des termes d'une suite géométrique. À supposer que $\theta \not\equiv 0\,[2\pi]$ (auquel cas le calcul me semble abordable sans technique particulière), on a donc :

$$S_n + iT_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \,.$$

Pour simplifier cette fraction, on **factorise par l'angle moitié**, *i.e* :

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} &= \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \,. \end{aligned}$$

De fait :

$$S_n = \mathrm{Re}(S_n + iT_n) = \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et

$$T_n = \mathrm{Im}(S_n + iT_n) = \sin\left(\frac{n}{2}\theta\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \,.$$

Youpi.

✌ **Remarque VI.12.** La technique de factorisation par l'angle moitié se révèle souvent fort utile en pratique pour factoriser et/ou déterminer module et argument d'expressions du type $e^{ip} \pm e^{iq}$ avec $p, q \in \mathbb{R}$. En effet, on a alors :

$$\begin{aligned} e^{ip} \pm e^{iq} &= e^{ip}\left(1 \pm e^{i(q-p)}\right) \\ &= e^{i(p+(q-p)/2)}\left(e^{-(q-p)/2} \pm e^{(q-p)/2}\right) \,, \end{aligned}$$

le membre de droite s'exprimant alors à l'aide d'un cosinus ou sinus.

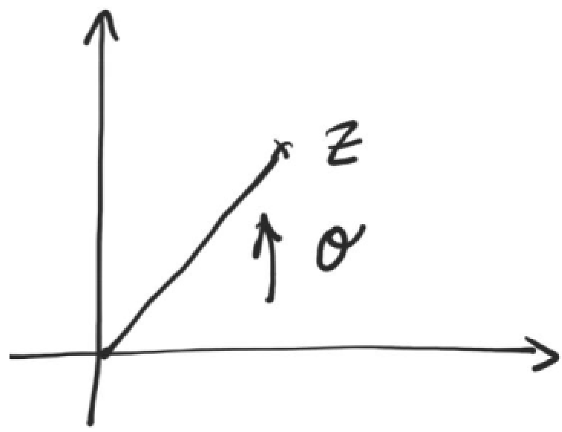
✍ **Exercice VI.3.** Retrouver, pour $p, q \in \mathbb{R}$, les formules pour $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.

b) Argument

Définition VI.4. Soit $z \in \mathbb{C}$; on appelle **argument** de z tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = |z|e^{i\theta} \,.$$

Remarque VI.13.
- **Attention :** il n'y a **pas** unicité de l'argument ; par exemple $1 = e^{i\times 0} = e^{2i\pi}$.
- Géométriquement, un argument de $z \in \mathbb{C}$ d'image $A \in \mathbb{R}^2$ est une mesure de l'angle orienté entre l'axe des abscisses et la droite (OA).



- 0 admet tout nombre réel comme argument.

Proposition VI.12. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et soit θ_0 un argument de z. Alors l'ensemble des arguments de z est :
$$\mathscr{A}_z = \{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Démonstration. Démontrons deux inclusions.

($\supset$) Immédiat par périodicité.

($\subset$) Soit $\eta \in \mathscr{A}_z$; alors $z = |z|e^{i\eta} = |z|e^{i\theta_0}$ donc, comme $|z| \neq 0$, $e^{i\eta} = e^{i\theta_0}$ et donc $\eta \equiv \theta_0\,[2\pi]$, d'où le résultat.

□

Remarque VI.14.
- Un piège classique à éviter : si $z = ae^{i\theta}$, θ n'est pas nécessairement un argument de z, étant qu'il pourrait être négatif…Mais pas (trop) de panique : $-1 = e^{i\pi}$.
- Sur un intervalle de longueur inférieure à 2π, l'argument est unique.

Notation. Soit $z \in \mathbb{C}$; on note $\arg(z)$ l'unique élément de $\mathscr{A}_z \cap [0, 2\pi[$. Cette notation est arbitraire ; certains préfèrent donc écrire des choses du style "$\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$".

Remarque VI.15. Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a :
$$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) \in \{0, \pi\}\,.$$

Exemple VI.4. Pour déterminer l'argument de $\sqrt{3} + i$, on le divise par son module et on essaie de reconnaître une exponentielle connue :
$$\frac{\sqrt{3} + i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}\,.$$

Ainsi, $\arg(\sqrt{3} + i) = \dfrac{\pi}{6}$.

c) Forme trigonométrique

Définition VI.5. On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z toute écriture de la forme $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

➠ **Exemple VI.5.** $-1 = e^{i\pi} = e^{3i\pi}$; notons au passage que cette écriture n'est **pas unique**.

✌ **Remarque VI.16.**

— Travailler avec des complexes sous forme trigonométrique est en général une bonne idée lorsque l'on veut les multiplier et/ou diviser, mais pas pour les additionner.

— Dans l'écriture sous forme trigonométrique "$z = re^{i\theta}$", on a nécessairement $r = |z|$ et $\theta \in \mathscr{A}_z$.

Proposition VI.13. Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

(i) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;

(ii) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$;

(iii) $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$.

Démonstration. Mettre z et z' sous forme trigonométrique. □

✍ **Exercice VI.4.** Soit $t \in \mathbb{R}$; mettre sous forme trigonométrique le complexe $1 + e^{it}$.

➥ **Correction :** *On factorise par l'angle moitié :*

$$\begin{aligned} 1 + e^{it} &= (e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}})e^{i\frac{t}{2}} \\ &= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}} . \end{aligned}$$

Il faut ensuite digresser selon le signe de $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

✍ **Exercice VI.5.** Soient $a, b, t \in \mathbb{R}$; démontrer qu'il existe $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi) .$$

➥ **Correction :** *On a :*

$$\begin{aligned} a\cos(t) + b\sin(t) &= \mathrm{Re}(ae^{it} - ibe^{it}) \\ &= \mathrm{Re}((a - ib)e^{it}) \end{aligned}$$

et donc, en posant $A = |a - ib|$ *et* $\varphi = -\arg(a - ib)$ *on a :*

$$a\cos(t) + b\sin(t) = A\mathrm{Re}(e^{i(t-\varphi)}) = A\cos(t - \varphi) .$$

d) Exponentielle complexe

Définition VI.6. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **exponentielle** de z le nombre complexe

$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)} .$$

✌ **Remarque VI.17.** Remarquons que les deux "exponentielles" intervenant dans cette notation sont différentes : la première est un exponentielle réelle, la seconde est de type "$e^{i\theta}$".

Proposition VI.14. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

(i) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$;

(ii) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}(z)[2\pi]$;

(iii) $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;

(iv) $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$;

(v) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{nz} = (e^z)^n$.

Démonstration. Immédiat en passant par la définition. □

Proposition VI.15. Soit $z \in \mathbb{C}$; alors $e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

✌ **Remarque VI.18.**

— En particulier, l'exponentielle complexe n'est **PAS** bijective.

— On en déduit que, si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z \equiv z' \,[2i\pi]$.

Démonstration.

($\Leftarrow$) Immédiat.

($\Rightarrow$) Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est tel que $e^z = 1$, alors $e^x e^{iy} = 1$ et donc $e^x = |e^z| = 1$, *ergo* $x = 0$ et $e^{iy} = 1$, d'où le résultat.

□

Proposition VI.16. La fonction

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto e^z \end{aligned}$$

est surjective. De plus, pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma \in \mathbb{C}$ est tel que $e^\gamma = a$, on a :

$$\exp^{-1}(\{a\}) = \{\gamma + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

Démonstration. L'exponentielle complexe est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ d'après le point (iv) de la proposition VI.14. Soit ensuite $a \in \mathbb{C}^*$, que l'on peut écrire sous forme trigonométrique $a = |a|e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathscr{A}_a$. Alors, si on pose $\gamma = \ln(|a|) + i\theta$, on a :

$$\exp(\gamma) = e^{\ln(|a|)}e^{i\theta} = |a|e^{i\theta} = a$$

donc exp est bien surjective. Enfin, pour tout $\tau \in \mathbb{C}$:

$$a = e^{\tau} \Leftrightarrow e^{\gamma} = e^{\tau} \Leftrightarrow \gamma \equiv \tau\,[2i\pi]$$

□

✌ **Remarque VI.19.** L'exponentielle complexe réalise donc une bijection entre toute "bande" de la forme $\Lambda = \{x + iy \,|\, (x, y) \in \mathbb{R} \times [2k\pi, 2(k+1)\pi[\}$ et $\mathbb{C}^*$.

3.– Équations algébriques

a) Trinômes du second degré

Vous avez logiquement une idée assez précise de la méthode de résolutions d'équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Le but de ce paragraphe est de mettre en place un analogue complexe de ce procédé.

Définition VI.7. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **racine carrée** tout nombre complexe a tel que $a^2 = z$.

➠ **Exemple VI.6.** 2 est une racine carrée de 4, i une racine carrée de -1.

Proposition VI.17. Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées distinctes.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$). Procédons par analyse–synthèse.

Analyse. Soit $a = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, avec $\rho > 0$ tel que $a^2 = z$, i.e $re^{i\theta} = \rho^2 e^{2i\varphi}$. Alors, en passant au module dans cette égalité, on obtient

$$\rho^2 = r \;\; i.e \;\; \rho = \sqrt{r}\,.$$

En passant ensuite à l'argument dans l'égalité initiale, on a :

$$2\varphi \equiv \theta\,[2\pi]$$

ce qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\varphi = \theta + 2k\pi$ et donc, en divisant par 2 :

$$\varphi \equiv \frac{\theta}{2}\,[\pi]\,.$$

Ceci entraîne donc que φ est congru à $\dfrac{\theta}{2}$ ou $\dfrac{\theta}{2} + \pi$ modulo 2π. Or, comme $e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} = -e^{i\frac{\theta}{2}}$ on a *in fine* que :

$$a \in \left\{\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}, -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right\}\,.$$

Synthèse. Il est immédiat que les deux valeurs proposées ci–dessus sont des racines carrées de z.

□

Exemple VI.7. Les deux racines carrées de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont donc $\pm e^{i\frac{\pi}{4}}$, *i.e* $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

Remarque VI.20. Il est donc aisé de trouver la racine carrée d'un nombre complexe dont on connaît la forme trigonométrique. Si on ne connait que sa forme algébrique $z = x + iy$, on peut faire usage de la méthode suivante : si $a = X + iY$ est tel que $a^2 = z$ alors :

$$X^2 - Y^2 + 2iXY = x + iy$$

et, commme $|a|^2 = |z|$:

$$(X^2 + Y^2)^2 = x^2 + y^2 \,.$$

On obtient donc un système de trois équations qu'il nous sera généralement possible de résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ccc} X^2 - Y^2 & = & x \\ 2XY & = & y \\ (X^2+Y^2)^2 & = & x^2+y^2 \end{array}\right. .$$

Exemple VI.8. Pour déterminer les racines de $1+i$, on tombe sur les équations :

$$\left\{\begin{array}{ccc} X^2 - Y^2 & = & 1 \\ 2XY & = & 1 \\ (X^2+Y^2)^2 & = & 2 \end{array}\right.$$

i.e

$$\left\{\begin{array}{ccc} X^2 - Y^2 & = & 1 \\ 2XY & = & 1 \\ X^2+Y^2 & = & \sqrt{2} \end{array}\right. .$$

En utilisant les deux équations quadratiques, on trouve :

$$X = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \quad Y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \,.$$

La seconde équation nous dit de plus que X et Y ont même signe, ainsi les racines de $1+i$ sont :

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \,.$$

Proposition VI.18. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (\mathbf{E}\ :\text{VI.3})$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et on pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

— si $\Delta = 0$, l'équation (**E** :VI.3) admet un unique solution, à savoir :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}\,;$$

— si $\Delta \neq 0$, l'équation (**E** :VI.3) admet exactement deux solutions distinctes, à savoir :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée de Δ.

✌ **Remarque VI.21.** Notons que l'extension à $\mathbb{C}$ de la notion de racine carrée simplifie le cas réel en nous évitant de distinguer deux cas selon le signe du discriminant Δ.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$; commençons par remarquer que :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2}$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\,. \end{aligned}$$

Soit $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ (qui sera donc nulle si Δ l'est). Alors :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (\mathbf{E}\ :\text{VI.3}) &\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\delta}{2a} \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

✌ **Remarque VI.22.** On déduit de ce résultat que si r, r' sont les deux racines du trinôme (comptées avec multiplicité), on a la factorisation :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z-r)(z-r')\,.$$

De façon générale, si P est une fonction polynomiale complexe admettant une racine a, l'expression $P(z)$ peut se factoriser, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $z - a$ (*cf.* chapitre XIV).

Exemple VI.9. L'équation $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1$ et solutions $1 + i$ et i.

Remarque VI.23. Le produit (resp. la somme) des solutions de (**E** :VI.3) est égal à $\frac{c}{a}$ $\left(\text{resp. égale à } -\frac{b}{a}\right)$. Nous verrons dans le chapitre XIV qu'il ne s'agit pas d'une coïncidence.

Proposition VI.19. Soient $z, z', s, p \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{ccc} z + z' & = & s \\ zz' & = & p \end{array}\right. \iff z \text{ et } z' \text{ sont solutions de } X^2 - sX + p = 0\,.$$

Démonstration. Le sens indirect provient de la proposition VI.18. Pour le sens direct, il suffit de développer $(X - z)(X - z')$, qui a clairement pour racines z et z' et est égal à $X^2 - sX + p$ □

Exercice VI.6. Déterminer les nombres complexes x, y tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x + y & = & i \\ xy & = & 2 \end{array}\right. .$$

b) Racines n–ièmes

Dans tout ce paragraphe, nous considérons comme fixé un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et nous intéressons à la notion de racine n–ième (complexe) définie ci–ensuite.

Définition VI.8. Soit $z \in \mathbb{C}$; on appelle **racine n–ième** de z tout nombre complexe a tel que $a^n = z$.

Vocabulaire. Une racine n–ième de 1 est appelée **racine n–ième de l'unité**.

Notation. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n–ièmes de l'unité ; *i.e*

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\}\,.$$

Remarque VI.24. Il est aisé de démontrer que :
— $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$ (passer au module) ;
— $\mathbb{U}_n$ est stable par produit et passage à l'inverse.

Proposition VI.20. Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Alors :

$$\mathbb{U}_n = \{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\}\,.$$

En particulier, $\mathbb{U}_n$ est un ensemble contenant exactement n éléments.

Remarque VI.25. Notons que $\xi_0 = \xi_n = 1$.

Démonstration.

($\supset$) Immédiat en remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\xi_k^n = e^{2ik\pi} = 1 .$$

($\subset$) Soit $z \in \mathbb{U}_n$, i.e $z^n = 1$. Ceci entraîne en particulier que $z \in \mathbb{U}$, *i.e* $|z| = 1$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Le fait que $z^n = 1$ a pour conséquence que $n\theta \equiv 0\,[2\pi]$, *ergo* il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $e^{i\theta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Il ne nous reste plus pour conclure qu'à remarquer que $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ sont deux à deux distincts.

□

Remarque VI.26.

— Si on pose $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\xi_k = \xi^k$.

— Ceci a pour conséquence que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = \frac{\xi^n - 1}{\xi - 1} = 0$$

car $\xi^n = \xi_n = 1$.

Exemple VI.10.

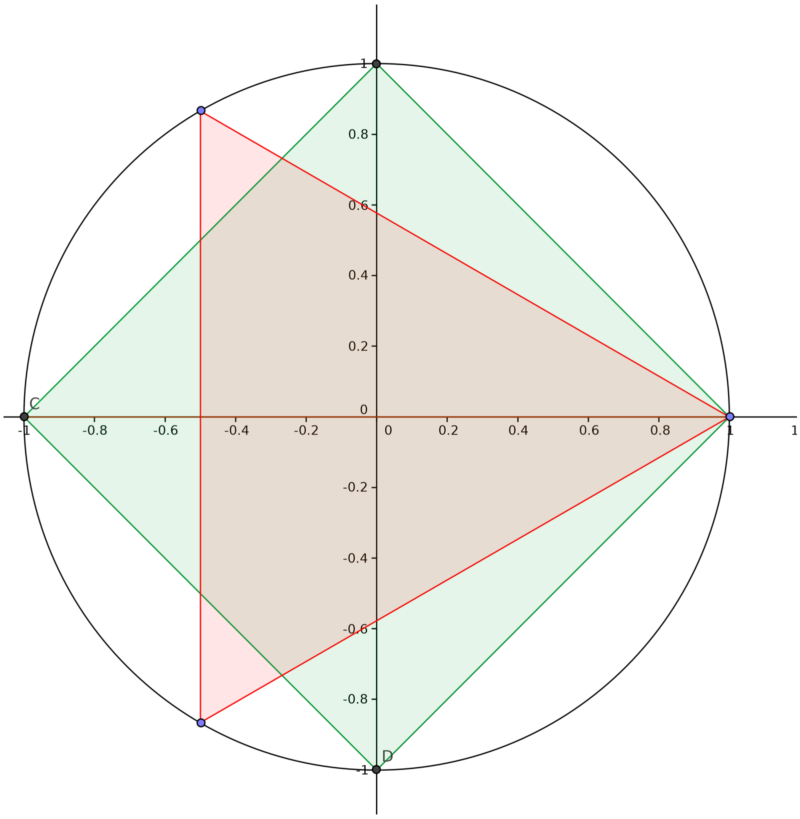
— $\mathbb{U}_1 = \{1\}$;

— $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$;

— en posant $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on a $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. Remarquons que l'on a de fait $1 + j + j^2 = 0$ et $\overline{j} = j^2$;

— $\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -i, i\}$.

Géométriquement, les points de $\mathbb{U}_n$ forment un polygone régulier à n côtés, comme illustré sur la figure ci–ensuite pour $n = 3, 4$.



Proposition VI.21. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$. Alors les racines n–ièmes de z sont exactement les

$$\sqrt[n]{r}e^{\frac{i\theta}{n}}\xi_k$$

pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Démonstration. Cela provient du fait que si u et u' sont deux racines n–ièmes de z, alors $\dfrac{u}{u'} \in \mathbb{U}_n$. □

➠ **Exemple VI.11.** Les racines cubiques de 2 sont $\sqrt[3]{2}$, $j\sqrt[3]{2}$ et $j^2\sqrt[3]{2}$.

4.– Transformations du plan

Le but de ce paragraphe est de construire un "dictionnaire" reliant transformations géométriques du plan et applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Rappelons que la correspondance entre ces deux ensembles est donnée par l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2\\ z &\mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))\end{aligned}$$

de réciproque

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C}\\ (x, y) &\mapsto x + iy \quad .\end{aligned}$$

✌ **Remarque VI.27.** Afin de mieux comprendre ce qui va suivre, il peut être utile de noter les deux choses suivantes : si $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ sont des points du plans d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$, alors :

— le module $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|$ est égal au quotient des longueurs (non algébriques) AC et AB ;

— l'argument $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)$ est une mesure (modulo 2π) de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

L'argument *supra* permet de déterminer rapidement si les points A, B, C sont alignés ou orthogonaux.

a) Translations, homothéties

Soit $u = \varphi(z_o) \in \mathbb{R}^2$; on appelle **translation de vecteur** u l'application

$$\begin{aligned}\tau_u : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ \varphi(z) &\mapsto \varphi(z + z_0)\ .\end{aligned}$$

Si $\Omega = \varphi(\omega) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle **homothétie de centre Ω et de rapport λ** l'application

$$\begin{aligned}\mu_{\Omega,\lambda} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ \varphi(z) &\mapsto \varphi(\omega + \lambda(z - \omega))\ .\end{aligned}$$

b) Rotations

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $\Omega = \varphi(\omega) \in \mathbb{R}^2$; on appelle **rotation de centre Ω et d'angle θ** l'application

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(z) &\mapsto \varphi\left(\omega + (z-\omega)e^{i\theta}\right) . \end{aligned}$$

c) Similitudes directes

Définition VI.9. Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\Omega = \varphi(\omega) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **similitude directe de centre Ω, de rapport λ et d'angle θ** l'application :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_{\Omega,\lambda,\theta} : \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ \varphi(z) &\mapsto \varphi\left(\omega + \lambda(z-\omega)e^{i\theta}\right) . \end{aligned}$$

✌ **Remarque VI.28.** Une similitude directe est donc la composée d'une rotation et d'une homothétie. Il s'agit en fait des applications de la forme

$$\varphi(z) \mapsto \varphi(az+b)$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$.

Proposition VI.22. Les similitudes directes conservent les angles orientés.

Démonstration. Les rotations et les homothéties conservent les angles orientés, d'où le résultat. □