Chapitre V

Applications, relations

1.⁻ Applications

a) C'est quoi ?

Définition V.1. Si E et F sont deux ensembles, on appellera **application** de E dans F la donnée de tout "mécanisme" f associant à chaque élément de E un unique élément de F, noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f. L'ensemble E est alors appelé **ensemble de départ** de f, F son **ensemble d'arrivée** et $\mathscr{G} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \subset E \times F$ son **graphe**.

Notation. $f : E \to F$ ou, plus complètement :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \, . \end{aligned}$$

Exemple V.1. Un exemple bien connu et qui nous exploiterons au delà de toute raison est celui de la fonction "carré" !

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \, . \end{aligned}$$

Remarque V.1. Deux applications seront donc considérées comme égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même graphe. Cela n'est pas sans soulever quelques problèmes concernant l'ensemble d'arrivée : celui de la fonction ci–dessus est $\mathbb{R}_+$, mais pourrait être (entre autres) $\mathbb{R}$ ...Il nous faudra donc faire preuve de vigilance, mais parfois aussi de souplesse.

Notation. L'ensemble des fonctions partant d'un ensemble E et arrivant dans un ensemble F sera noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.

Remarque V.2. Mettons en exergue quelques cas particuliers :
— l'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans E, que vous connaissiez déjà sous le nom de **suites** (si, si). On utilisera la notation u_n (pour $n \in \mathbb{N}$) pour $u(n)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou simplement $(u_n)_n$) pour u ;
— plus généralement, une **famille** d'éléments de E indexées par un ensemble I est en réalité une application de I dans E.

b) Restrictions, prolongements

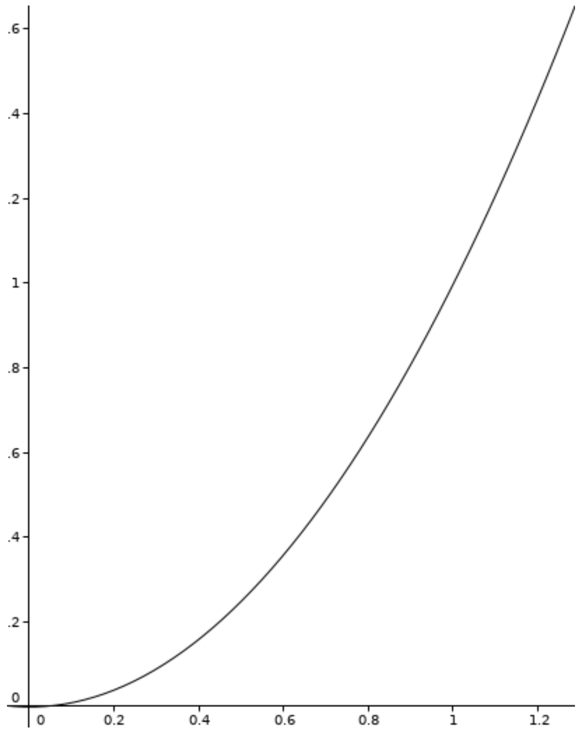
L'objectif de ce paragraphe est d'étudier deux méthodes nous permettant de modifier l'ensemble de départ d'une application en agissant de façon "naturelle" sur son graphe.

Définition V.2. Soit $f : E \to F$ une application et soit $E' \subset E$. On appelle **restriction de f à E'** l'application

$$\begin{aligned} f_{|E'} : E' &\to F \\ x &\mapsto f(x)\ . \end{aligned}$$

Remarque V.3. La restriction de f à E' est unique.

Exemple V.2. La restriction de $x \mapsto x^2$ à $\mathbb{R}_+$ correspond au graphe ci–ensuite.



Définition V.3. Soit $f : E \to F$ une application et soit E' un ensemble contenant E. On appelle **prolongement de f à E'** toute application $g : E' \to F$ telle que $g_{|E} = f$.

Remarque V.4. Il n'y a **PAS** unicité du prolongement de f à E'. Par exemple, la fonction

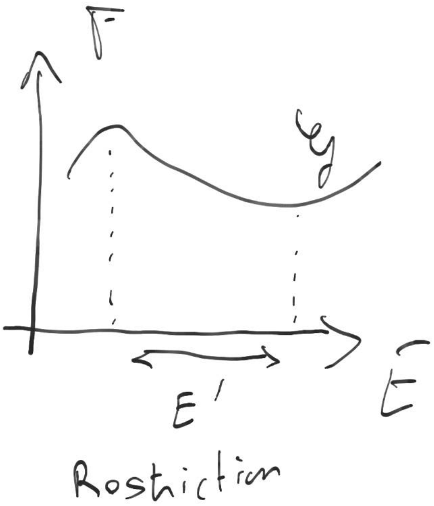
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

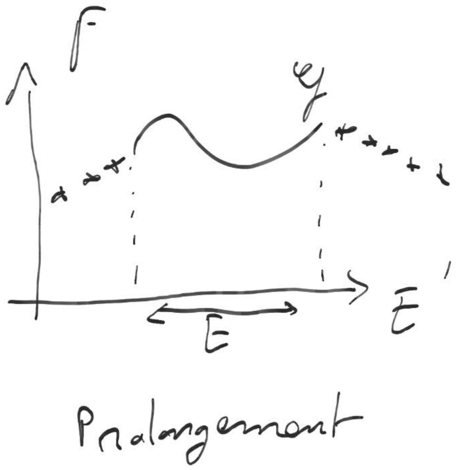
admet pour prolongements à $\mathbb{R}$ toutes les applications du type

$$f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \alpha + 42 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$

Moralement, une restriction revient donc à "couper" le graphe pour n'en garder qu'une partie, alors qu'un prolongement est un extension du graphe par des points choisis aribitrairement.





c) Injections, surjections, bijections

Disons le d'entrée de jeu : ce paragraphe est **absolument fondamental**. Voyez le un peu un rhinocéros enragé courant dans votre direction : à ignorer à vos risques et périls.

Définition V.4. Soit $f : E \to F$ une application et soit $y \in F$. Un élément x de E est appelé **antécédent de y par f** si $f(x) = y$.

➠ **Exemple V.3.** Un point de l'ensemble de départ peut avoir n'importe quel nombre d'antécédent(s) par l'application : penser -1 pour $x \mapsto x^2$ (0 antécédent), 0 et 1 pour cette même fonction (1 et 2 antécédents respectivement), 14 pour la fonction constante égale à 14 (une infinité d'antécédents).

Définition V.5. Une application $f : E \to F$ est dite :

— **injective** si pour tout point F admettant un antécédent par f, ce dernier est unique ;
— **surjective** si tout point F admet au moins un antécédent par f ;
— **bijective** si tout point F admet exactement un antécédent par f.

Remarque V.5.
- Une application est donc bijective si et seulement si elle est injective **et** bijective.
- Géométriquement, le caractère inj/surj/bijectif d'une application peut être observé *via* le nombre de points d'intersection entre sa courbe représentative et une droite horizontale.

Notation. L'ensemble des bijections de E dans F sera noté $\mathfrak{S}(E, F)$ ou $S(E, F)$. Lorsque $E = F$, on notera $\mathfrak{S}_E$ ou S_E.

Exemple V.4. "Par lecture graphique" (et rigoureusement, aussi), on peut remarquer que les fonctions périodiques type (co)sinus ne sont pas injectives, que $x \mapsto x$ est bijective et que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective non surjective.

Remarque V.6. Ces notions demandent de définir avec **précision et rigueur** les applications sur lesquelles nous travaillons. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est :
- surjective non injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$;
- injective non surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$;
- bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$;
- rien du tout de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition V.1. Soit $f : E \to F$ une application. Alors :

$$f \text{ est injective} \\ \Longleftrightarrow \\ \forall x, x' \in E, \quad (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x') .$$

Démonstration.

($\Uparrow$) Immédiat par définition d'antécédent.

($\Downarrow$) Soit $y \in F$ et soient x, x' deux antécédents de f. Alors $f(x) = f(x') = y$ donc $x = x'$. L'application f est donc injective.

□

Remarque V.7. Cela signifie que pour montrer que f est injective, il faut et il suffit de montrer que si x, x' sont tels que $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. **Cette méthode est à privilégier en pratique.**

Exemple V.5. Cette méthode permet aisément de démontrer que $x \mapsto x^3$ est injective sur $\mathbb{R}$ (passer à la racine cubique).

d) Composition

Définition V.6. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On appelle **composée** de g par f l'application

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\mapsto g(f(x)) . \end{aligned}$$

Remarque V.8.
- **Attention au sens de composition :** la composée $g \circ f$ applique d'abord f, puis g.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

- La composition des applications est associative ; la démonstration de ce résultat est un exercice aisé.
- La composition n'est **PAS** commutative ; regarder par exemple $f : x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x^2$ (définies sur $\mathbb{R}$).

Définition V.7. Soit E un ensemble. On appelle **identité** de E l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E : E &\to E \\ x &\mapsto x\ . \end{aligned}$$

Remarque V.9. Pour toute application $f \in E^E$, on a $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f$. On dit que id_E est un **élément neutre** pour la composition des applications.

Proposition V.2. La composée de deux injections (resp. surjections, bijections) est une injection (resp. surjection, bijection).

Démonstration. Immédiat via la définition. □

Exemple V.6. Si f est une injection à valeurs réelles, la fonction $x \mapsto e^{f(x)}$ est injective.

Exercice V.1. Soient E, F deux ensembles **non vides** et soit $f : E \to F$ une application. Démontrer que :

1. f est injective $\Leftrightarrow \exists\, g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ **[inversibilité à gauche]** ;
2. f est surjective $\Leftrightarrow \exists\, g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ **[inversibilité à droite]**.

L'inverse à droite (resp. à gauche) d'une surjection (resp. d'une injection) est donc une injection (resp. une surjection).

Correction :

1. ($\Rightarrow$) *Supposons f injective et fixons un élément arbitraire $\mho \in E$. Nous pouvons alors définir g par le procédé suivant : pour tout $y \in F$, soit y admet un (unique) antécédent $x \in E$ et dans ce cas nous posons $g(y) = x$, soit ce n'est pas le cas et alors nous fixons $g(y) = \mho$.*

($\Leftarrow$) *Supposons f inversible à gauche d'inverse $g : F \to E$ et soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors, en composant cette égalité à gauche par g nous obtenons $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, i.e $x = x'$. On en déduit que f est bien injective.*

2. ($\Rightarrow$) *Supposons f surjective. Alors, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; il nous suffit de poser $g(y) = x$ pour avoir $f \circ g(y) = f(x) = y$.*

   ($\Leftarrow$) *Supposons f inversible à droite d'inverse $g : F \to E$. Alors, pour tout $y \in F$, on a $f(g(y)) = y$; $g(y)$ est donc un antécédent de y, ce qui prouve la surjectivité de f.*

Proposition V.3. Soient E, F deux ensembles **non vides** et soit $f : E \to F$ une application. Alors :

(i) f est bijective $\Leftrightarrow$ f $\exists\, g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$;

(ii) dans ce cas, la fonction g est unique. On l'appelle réciproque de f.

Notation. SI f est bijective, on note sa réciproque f^{-1}.

✌ **Remarque V.10.** Au risque de me répéter, on n'utilise la notation f^{-1} **que** lorsque f est **bijective**.

Démonstration. Le point (i) est une conséquente de l'exercice V.1. Pour montrer que les inverses à gauche et à droite sont uniques et identiques, notons g et g' deux inverses à gauche de f et h un inverse à droite de cette même application ; alors, comme $f \circ h = \mathrm{id}_F$, on a :

$$g \circ f \circ h = g' \circ f \circ h = h$$

ce qui donne, en simplifiant $g = g' = h$. □

➠ **Exemple V.7.** L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N}^* \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

est bijective, de réciproque

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n-1\,. \end{aligned}$$

Cet exemple est à rapprocher d'un problème attribué à David Hilbert (1862–1943) : "étant donné un hotel complet possèdant une infinité de chambres, comment accomoder un invité de plus ?".

Proposition V.4. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors :

(i) f^{-1} est une bijection de F dans E, de réciproque $(f^{-1})^{-1} = f$;

(ii) $g \circ f$ est une bijection de E dans G, de réciproque

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\,.$$

Démonstration. Comme les réciproques sont uniques, il nous suffit de vérifier que les applications proposées ci–dessus remplissent bien le contrat, ce qui est immédiat. □

e) Images directe et réciproque

Définition V.8. Soit $f : E \to F$ une application. Alors :

(i) si $A \subset E$, on appelle **image (directe) de** A **par** f l'ensemble
$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\} \ ;$$

(ii) si $B \subset F$, on appelle **image réciproque de** B **par** f l'ensemble
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\} \ .$$

✌ **Remarque V.11.**

— Les esprits acérés auront remarqué que nous utilisons la notation $f^{-1}(B)$ alors que l'application n'est pas bijective ...C'est triste, et cela signifie qu'il faudra être bien vigilant à ne pas confondre image directe par l'application réciproque (chose existant uniquement dans le cas bijectif) et image réciproque (machin existant quoi qu'il arrive). La seule bonne nouvelle dans tout cela est que si f est bijective, alors ces deux concepts coïncident. Il faut savoir se satisfaire de peu.

— Si $y \in F$, alors $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des antécédents de y.

— On remarque que f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

➠ **Exemple V.8.**

— Pour $f : x \mapsto x^2$, $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$;

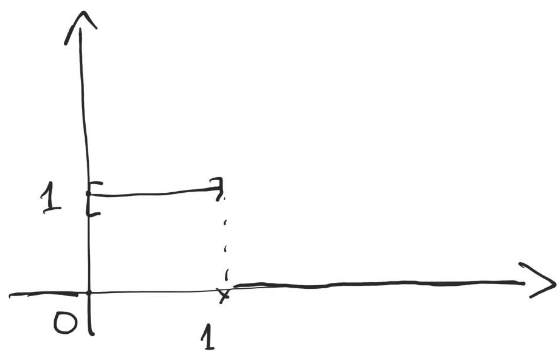
— $\sin^{-1}(\{0\}) = \pi\mathbb{Z} = \{\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$;

— $\exp(\mathbb{R}_+) = [1, \infty[$.

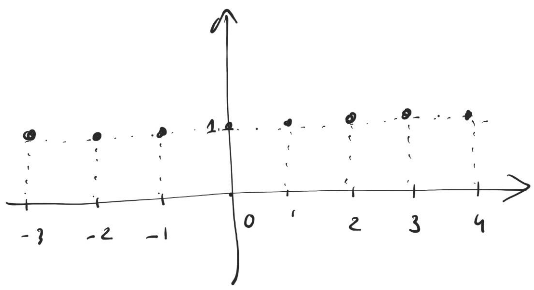
f) Indicatrices

Définition V.9. Soit E un ensemble et soit $A \subset E$. On appelle **fonction indicatrice** (ou caractéristique) de A l'application
$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \ . \end{cases} \end{aligned}$$

➠ **Exemple V.9.** Pour $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ est la fonction constante égale à 1, $\mathbb{1}_{[0,1]}$ ressemble à ça :



et celle de $\mathbb{Z}$ à ceci.



Nous laissons l'entière responsabilité au lecteur et à son futur psychiatre d'imaginer l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.

✍ **Exercice V.2.** Soit E un ensemble et soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Démontrer que :

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$;
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$;
3. $\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)$;
4. $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

➥ **Correction :**

1. Soit $x \in E$; alors

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 &\Leftrightarrow x \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{1}_A(x) = 1) \wedge (\mathbb{1}_B(x) = 1)\ .\end{aligned}$$

De fait, on a bien $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

2. De la même façon, on vérifie que, si $x \in E$:

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 &\Leftrightarrow x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{1}_A(x) = 1) \vee (\mathbb{1}_B(x) = 1)\ .\end{aligned}$$

Ici, il faut prendre garde au cas où $x \in A\cap B$, qui impose la formule suivante :

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B\ .$$

3. Soit $x \in E$; alors

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{B\setminus A}(x) = 1 &\Leftrightarrow x \in B \setminus A \\ &\Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \notin A) \\ &\Leftrightarrow (\mathbb{1}_B(x) = 1) \wedge (\mathbb{1}_A(x) = 0) \,.\end{aligned}$$

De fait, on a bien $\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)$.

4. En appliquant la question précédente à $B = E$, on trouve $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

2.⁻ Relations d'ordre

a) Relations binaires

Définition V.10. Soit E un ensemble. On appelle **relation** (binaire) sur E la donnée d'un couple $\mathscr{R} = (E, \mathscr{G})$, avec $\mathscr{G} \subset E \times E$.

Notation. Si $(x, y) \in \mathscr{G}$, on notera $x\mathscr{R}y$ et on dira que x **et** y **sont en relation via** $\mathscr{R}$.

➠ **Exemple V.10.**
— $\mathscr{R}_0 = (\mathbb{R}, \{(x, -x) \,|\, x \in \mathbb{R}\})$ correspond à la relation "être égal au signe près" ;
— $\mathscr{R}_1 = (\mathbb{N}, \{(n, 2n) \,|\, n \in \mathbb{N}\})$ correspond à la relation "être le double de".

b) Ensembles ordonnés

Définition V.11. Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une **relation d'ordre** si :
— $\forall x \in E$, $x\mathscr{R}x$ **[reflexivité]** ;
— $\forall x, y \in E$, $(x\mathscr{R}y) \wedge (y\mathscr{R}x) \Rightarrow (x = y)$ **[antisymétrie]** ;
— $\forall x, y, z \in E$, $(x\mathscr{R}y) \wedge (y\mathscr{R}z) \Rightarrow (x\mathscr{R}z)$ **[transitivité]**.
La donnée du couple $(E, \mathscr{R})$ est appelée **ensemble ordonné**.

➠ **Exemple V.11.**
— $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble ordonné, avec $\leq$ la relation $(\mathbb{R}, \{(x, y) \,|\, y - x \in \mathbb{R}_+\})$;
— $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonné ;
— $(\mathbb{N}, |\,)$ est un ensemble ordonné ;
— si E et F sont ordonnés, F^E est ordonné (*cf.* chapitre II).

Définition V.12. Soit $(E, \mathscr{R})$ un ensemble ordonné. On dit que $\mathscr{R}$ est un **ordre total** si

$$\forall x, y \in E, \quad (x\mathscr{R}y) \vee (y\mathscr{R}x) \,.$$

Dans le cas contraire, on parle d'**ordre partiel**.

➠ **Exemple V.12.** L'ordre classique sur $\mathbb{N}$ est total ; l'inclusion sur $\mathscr{P}(E)$ est partiel dès que E possède au moins deux éléments car $\mathscr{P}(E)$ contient alors deux singletons disjoints.

c) Majorants, minorants

Définition V.13. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et soit $A \subset E$. On dit que $x \in E$ est un…
— …**majorant de** A si $\forall a \in A$, $a \leq x$;
— …**minorant de** A si $\forall a \in A$, $a \geq x$.
Un majorant (resp. minorant) de A appartenant à A est appelé **plus grand élément** (resp. **plus petit élément**) ou maximum (resp. minimum) de A.

Notation. $\max(A)$, $\min(A)$.

✌ **Remarque V.12.** On démontre aisément que plus petit et plus grand élément sont uniques lorsqu'ils existent.

➠ **Exemple V.13.**
— $(\mathbb{R}, \leq)$ n'est pas minoré ni majoré ;
— $([0,1[, \leq)$ est majoré par 1 qui n'est pas son maximum ;
— $(\mathbb{N}, |\,)$ admet pour minimum 1 et maximum 0 (en effet, tout entier n divise 0 car $0 = n \times 0$) ;
— $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est minoré par $\emptyset$ et majoré par E. Ces deux derniers sont respectivement le plus petit et plus grand élément de $\mathscr{P}(E)$.

✌ **Remarque V.13.** Merci de **ne pas confondre** minorant (resp. majorant) et minimum (resp. maximum). Penser à $]0,1[$ muni de l'ordre classique en cas de crise de foi.

Vocabulaire. Un ensemble majoré et minoré est dit **borné**.

3.⁻ Relations d'équivalence

a) C'est quoi ?

Définition V.14. Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une **relation d'équivalence** si :
— $\forall x \in E$, $x\mathscr{R}x$ **[reflexivité]** ;
— $\forall x, y \in E$, $(x\mathscr{R}y) \Rightarrow (y\mathscr{R}x)$ **[symétrie]** ;
— $\forall x, y, z \in E$, $(x\mathscr{R}y) \wedge (y\mathscr{R}z) \Rightarrow (x\mathscr{R}z)$ **[transitivité]**.

➠ **Exemple V.14.**
— L'égalité est une relation d'équivalence sur tout ensemble.
— La relation triviale (E, E^2) est une relation d'équivalence sur tout ensemble E.

✍ **Exercice V.3.** Soit $f : E \to F$ une application. Démontrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur E par
$$x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y)$$
est une relation d'équivalence.

➥ **Correction :** *Un sage a dit : "Yaka écrire", et il avait raison.*

b) Congruences

◇ **Sur** $\mathbb{Z}$

Définition V.15. Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$. On dit que a **est congru à** b **modulo** n si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + kn$.

Notation. $a \equiv b\,[n]$.

➠ **Exemple V.15.** $3 \equiv 1\,[2]$, $9 \equiv -1\,[10]$.

✌ **Remarque V.14.**
— La congruence modulo 0 est l'égalité.
— La congruence modulo 1 est la relation triviale.
— Remplacer n par $-n$ ne change absolument rien. On peut donc supposer $n \in \mathbb{N}$ sans perdre de généralité.

Proposition V.5. Soit $n \in \mathbb{N}$; alors la congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration.
— La reflexivité est immédiate.
— Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b\,[n]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + kn$, ce qui entraîne $a = b + (-k)n$ et donc $b \equiv a\,[n]$, d'où la symétrie.
— Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b\,[n]$ et $b \equiv c\,[n]$. Ceci signifie qu'il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $b = a + kn$ et $c = b + \ell n$; ainsi
$$c = b + \ell n = a + kn + \ell n = a + (k + \ell)n$$
et donc $a \equiv c\,[n]$, d'où la transitivité.

□

◇ **Sur** $\mathbb{R}$

Définition V.16. Soient $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. On dit que a **est congru à** b **modulo** α si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + kn$.

Notation. $a \equiv b\,[\alpha]$.

Remarque V.15.
- Remarquons que le "k" de la définition est **entier**.
- Les relations de congruence modulo π et 2π sont chères aux physiciens et utiles en trigonométrie. Nous y reviendrons.

Proposition V.6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; alors la congruence modulo α est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Identique au cas entier. □

c) Partitions, classes d'équivalences

Définition V.17. Soit E un ensemble. On appelle **partition** de E toute famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que :
- $\forall i \in I,\ X_i \neq \emptyset$;
- $\forall i, j \in I,\ (i \neq j) \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$;
- $$E = \bigcup_{i \in I} X_i\,.$$

Notation. Les X_i étant deux à deux disjoints, on pourra écrire

$$E = \bigsqcup_{i \in I}^{n} X_i$$

pour souligner ce fait.

Remarque V.16. Lorsque $E \subset \bigcup_{i \in I} X_i$, on parlera de **recouvrement disjoint** plutôt que de partition.

Exemple V.16.
- $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-^*)$ constitue une partition de $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{N}$ est partitionné par les ensembles des entiers pairs et impairs ;
- on peut partitionner l'ensemble des réels comme suit (entre autres !) :

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[\,.$$

Exercice V.4. Démontrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si E est partitionné par la famille $(f^{-1}\{y\})_{y \in F}$.

Définition V.18. Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ et soit $x \in E$. On appelle **classe de x modulo $\mathscr{R}$** l'ensemble

$$\overline{x} = \{y \in E \mid x \mathscr{R} y\}\,.$$

✌ **Remarque V.17.** Soient $x, y \in E$; alors :
- — $y \in \bar{x} \iff x\mathscr{R}y \iff \bar{x} = \bar{y}$;
- — $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \iff \bar{x} = \bar{y}$.

✍ **Exercice V.5.** On munit $\mathbb{N}^2$ de la relation suivante $\sim$ définie par :

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c\,.$$

1. Démontrer que ceci définit une relation d'équivalence.
2. Établir une bijection entre l'ensemble des classes modulo $\sim$ et $\mathbb{Z}$.

Proposition V.7. Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$. Alors les classes d'équivalence modulo $\mathscr{R}$ forment une partition de l'ensemble E.

Démonstration. En exercice ; découle de la définition de relation d'équivalence. □

Cette notion sera approfondie plus tard (principalement en MP) autour de l'exemple suivant : si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n classes d'équivalences disjointes pour la congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$: $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$. L'ensemble quotient est alors noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

✌ **Remarque V.18.** Ce résultat est une équivalence : de toute partition ont peut construire une relation d'équivalence définie par l'appartenance à une même "composante".