Chapitre IV

Fonctions usuelles

1.⁻ Trigonométrie circulaire

a) Cosinus, sinus, tangente

Définition IV.1. Soit $T \in \mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite T–**périodique** si :

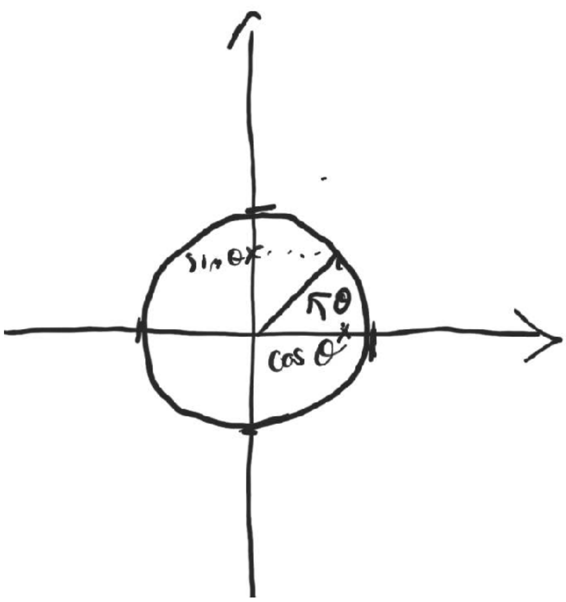
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x) .$$

✌ **Remarque IV.1.**

— Il n'y pas unicité de T (appelé période) ; certains ouvrages préfèrent introduire une "période minimale", à savoir le plus petit T positif tel que f soit T–périodique.

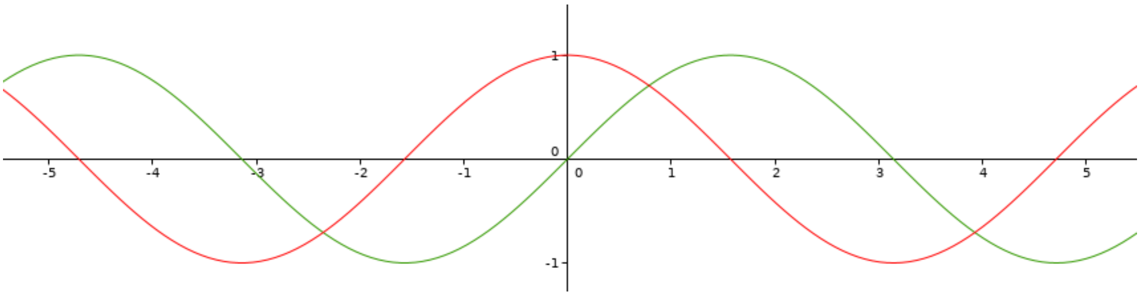
— Le fait qu'une fonction soit T–périodique permet de réduire son étude initiale à un intervalle de longueur T.

Les fonctions cosinus et sinus ont normalement été définies en terminale à travers une construction géometrico–graphique que nous reproduisons ci–ensuite (le truc vaguement rond est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$). Nous ne serons hélas guère en mesure de faire mieux.



Proposition IV.1.
(i) Les fonctions cosinus et sinus sont 2π–périodiques et dérivables sur $\mathbb{R}$.
(ii) La fonction cosinus est paire, la fonction sinus impaire.
(iii) $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

À toutes fins utiles, nous reproduisons ici l'allure courbes des fonctions cosinus (en rouge) et sinus (et vert) ci–ensuite.



Ces fonctions admettent de nombreuses valeurs remarquables, dont nous listons une selection dans le tableau *infra*.

θ	0	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	π	$3\pi/2$
$\cos(\theta)$	1	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	-1	0
$\sin(\theta)$	0	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1

Ces fonctions sont également remarquables de par leurs symétries : par exemple, si $\theta \in \mathbb{R}$, on a :
— $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$;
— $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$;
— $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$;
— $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$.
Il est possible de "retrouver" ces formules via le cercle trigonométrique (faites un dessin !).

✍ **Exercice IV.1.** Déterminer l'ensemble $E = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \;\middle|\; \cos(\theta) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right\}$.

Arrive maintenant le moment que vous attendiez probablement avec impatience : le **formulaire de trigonométrie** ! Il est à connaître **impérativement et parfaitement**, mais ne paniquez pas (trop) : toutes les formules qui suivent peuvent être retrouvées à l'aide des cinq premières, à condition d'avoir une vague idée de ce que l'on cherche à obtenir.

Proposition IV.2 (Formulaire de trigonométrie, kit de survie)**.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$; alors :
— $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$;
— $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
— $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
— $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
— $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;

Proposition IV.3 (Formulaire de trigonométrie, suite et fin)**.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$; alors :
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$;
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$;
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$;
- $\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$.

✍ **Exercice IV.2.** Soient $p, q \in \mathbb{R}$; démontrer que :

1. $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
2. $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
3. $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
4. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Définition IV.2. On appelle **fonction tangente** l'application suivante :

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} . \end{aligned}$$

Cette nouvelle fonction trigonométrique est définie partie sauf en les points d'annulation du cosinus. Elle admet des valeurs remarquables que l'on peut déduire de celles de cosinus et sinus, résumées (très partiellement) dans le tableau qui suit.

x	0	$\pi/4$	π
$\tan(x)$	0	1	0

Proposition IV.4. La fonction tangente est :
- impaire ;
- π–périodique ;
- dérivable sur son ensemble de définition, et :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} .$$

Démonstration. L'imparité est immédiate. Pour la périodicité, remarquons que, si

$x \in \mathbb{R}$, on a :

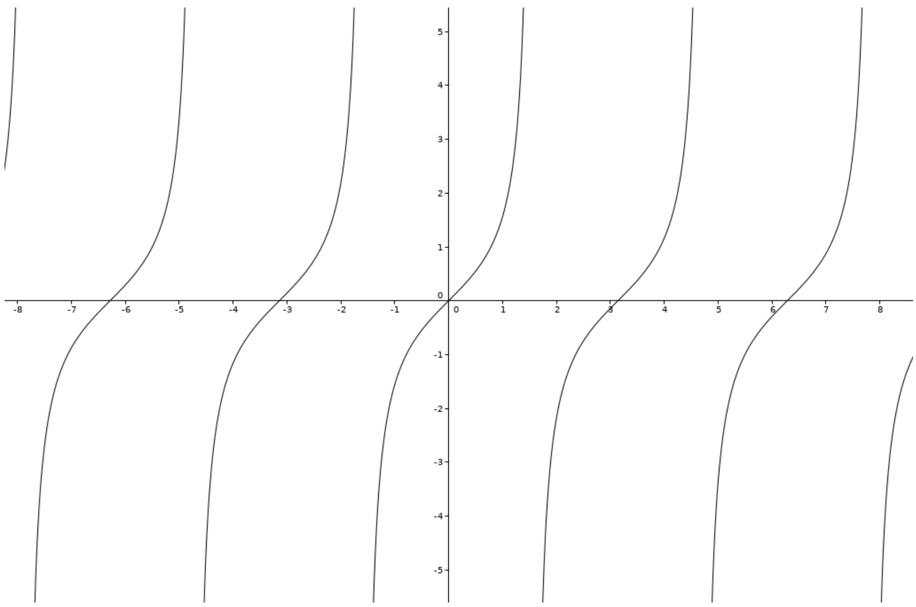
$$\begin{aligned}\tan(x+\pi) &= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \\ &= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} \\ &= \tan(x)\ .\end{aligned}$$

La fonction tan est dérivable comme produit de fonctions dérivables partout ou le cosinus ne s'annule pas, et par dérivée d'un quotient on a :

$$\begin{aligned}\tan' &= \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} \\ &= \begin{cases} 1+\tan^2 \\ \dfrac{1}{\cos^2} \end{cases} .\end{aligned}$$

□

Ce résultat nous permet de finir l'étude de la fonction tangente, en notant que sa dérivée est positive en tout point donc qu'elle est strictement croissante avec limites infinies en chaque $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\pi \in \mathbb{Z}$. Sa courbe a donc l'allure suivante.



Ajoutons à ceci une formule, dont la démonstration est un calcul immonde : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \pm b$ soit dans l'ensemble de définition de la fonction tangente, on a :

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}\ . \qquad (\mathbf{E}\ :\mathrm{IV}.1)$$

✍ **Exercice IV.3.** Soit $x \in]-\pi, \pi[$ et soit $t = \tan(x/2)$. Établir les formules suivantes :

(i)

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ ;$$

(ii)

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \ ;$$

(iii)

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \ ,$$

cette dernière égalité n'étant valable que si $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

➥ **Correction :**

(iii) Cette formule découle du fait que :

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{2t}{1-t^2} \ \text{par (E :IV.1)} \ . \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin\left(2\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2t\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2t \times \frac{1}{1+\tan^2(x/2)} \\ &= \frac{2t}{1+t^2} \ . \end{aligned}$$

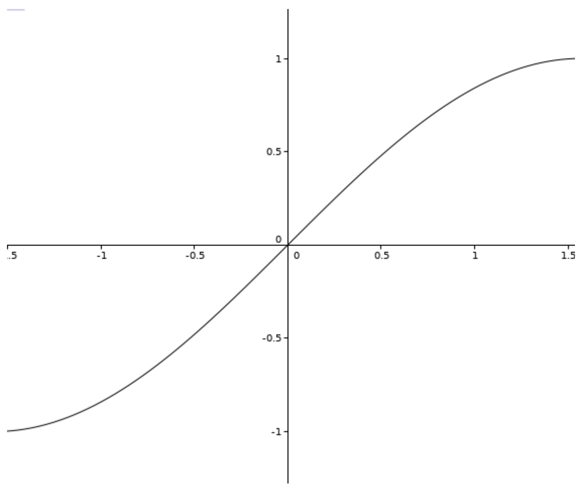
Le point (i) s'obtient comme corollaire des deux précédents.

b) Fonctions circulaires réciproques

La question qui nous vient naturellement (ou pas) à l'esprit est la suivante : les fonctions cosinus, sinus et tangente admettent–elles des réciproques ? La réponse est évidemment **NON**, pour de bêtes raisons liées à la périodicité. Par contre, la fonction suivante vérifie les hypothèses du théorème de la bijection :

$$\begin{aligned} \widehat{\sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \quad . \end{aligned}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que sa dérivée est strictement positive hors des bornes (c'est le cas). La courbe représentative de $\widehat{\sin}$ est sans appel : cette fonction est strictement croissante ; elle admet donc une réciproque strictement croissante.



Définition IV.3. On appelle **fonction arc sinus** la réciproque de $\widehat{\sin}$.

Notation. $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

✖ **ATTENTION :** arcsin n'est **PAS** la réciproque de la fonction sinus. En particulier, prenons garde à la quantification des égalités suivantes :
- si $x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$;
- si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.

La première égalité ne posera (normalement) jamais problème ; la seconde par contre peut amener quelques pièges vicieux. Par exemple, $\sin(\pi/2 + 2\pi) = 1$ et pourtant $\arcsin(\sin(\pi/2 + 2\pi)) = \arcsin(1) = \pi/2$.

Proposition IV.5. La fonction arcsin est une fonction continue strictement croissante de $[-1,1]$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Il s'agit de plus d'une fonction impaire.

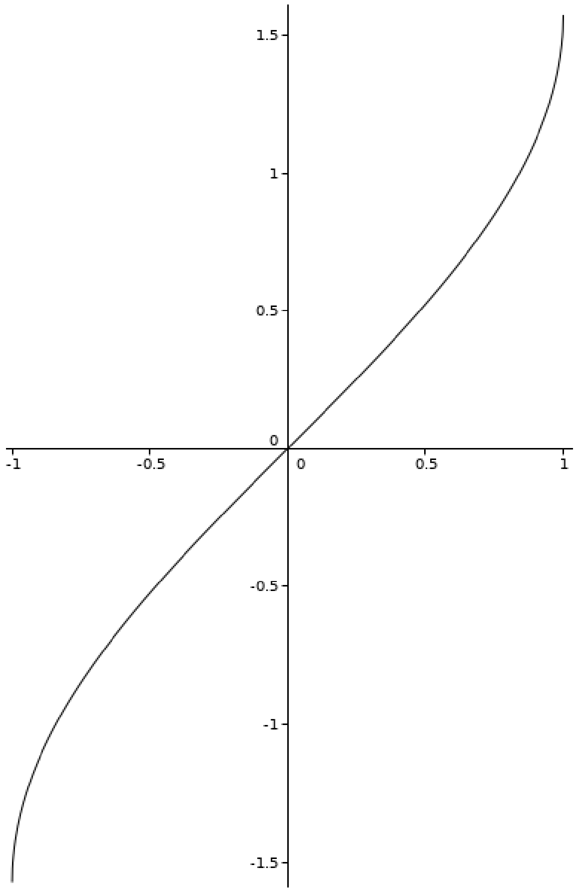
Démonstration. La seule chose qu'il nous reste à démontrer est l'imparité, qui est en fait un cas particulier d'un résultat général : si $f : E \to F$ est une impaire admettant une réciproque, alors pour tout $x \in F$ on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(-x) &= f^{-1}(-f(f^{-1}(x)) \\ &= f^{-1} \circ f(-f^{-1}(x)) \text{ car } f \text{ est impaire} \\ &= -f^{-1}(x) \end{aligned}$$

et donc f^{-1} est également impaire.

□

De tout ceci on peut déduire l'allure de la courbe représentative de arcsin ; il s'agit du symétrique de celle de $\widehat{\sin}$ par rapport à la première bissectrice.



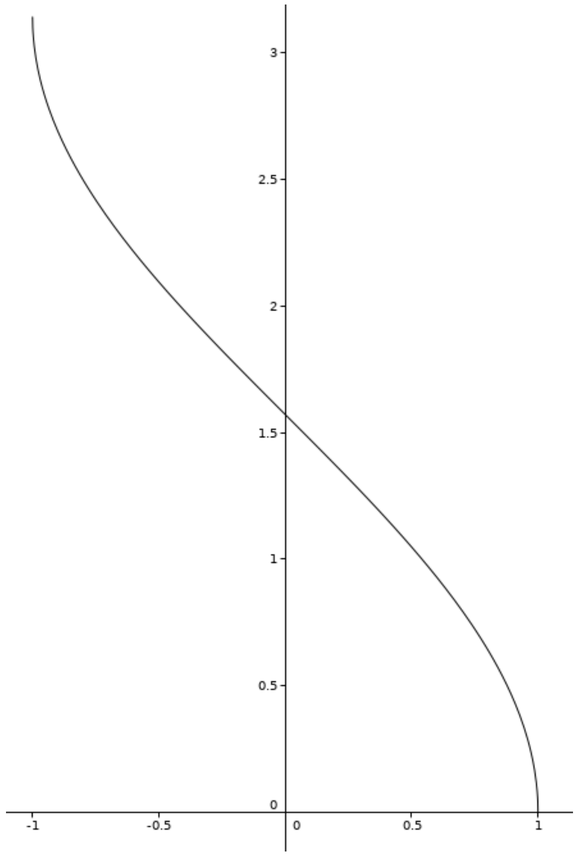
Définition IV.4. De façon analogue, on appelle **fonction arc cosinus** la réciproque de la fonction strictement décroissante

$$\widehat{\cos} : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \cos(x) \,.$$

Il s'agit d'une fonction continue strictement décroissante qui n'est ni paire ni impaire.

Notation. arcos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$

Les mêmes précautions d'usage sont à observer pour pour arcos que pour arcsin. Le graphique ci–dessous présente la courbe de arcos.



✌ **Remarque IV.2.** Soient $a, b, \theta \in \mathbb{R}$. Alors, si $u = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $v = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ on a $u, v \in [-1, 1]$ et $u^2 + v^2 = 1$. De fait, on a, en posant $\varphi = \arccos(u)$ et $A = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$\begin{aligned} a\cos(\theta) + b\sin(\theta) &= A(u\cos(\theta) + v\sin(\theta)) \\ &= A(\cos(\varphi)\cos(\theta) + \sin(\varphi)\sin(\theta)) \\ &= A\cos(\theta - \varphi)\,. \end{aligned}$$

Cette formule est particulièrement appréciée des physiciens pour des raisons qui leur sont propres.

✍ **Exercice IV.4.** Soit $x \in [-1, 1]$; déterminer une expression élémentaire de $\cos(\arcsin(x))$.

➥ **Correction :** *Remarquons tout d'abord que :*

$$\cos(\arcsin(x))^2 = 1 - \sin(\arcsin(x)^2 = 1 - x^2\,.$$

Ainsi, on a :

$$|\cos(\arcsin(x)| = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Or, $\arcsin(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$*, donc* $\cos(\arcsin(x) \geq 0$*, ce qui permet de conclure in fine que :*

$$\cos(\arcsin(x) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

Proposition IV.6. Les fonctions arcsin et arcos sont dérivables sur $]-1,1[$ et leurs dérivées sont données par, pour $x \in]-1,1[$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Démonstration. La démonstration est laissée en exercice au lecteur : il s'agit d'une application du théorème II.4 (dérivée d'une réciproque) et de l'exercice précédent. □

✌ **Remarque IV.3.** Le lecteur averti aura noté que ces fonctions ne sont pas dérivables en ± 1, qui sont les images des points d'annulation des dérivées de $\widehat{\sin}$ et $\widehat{\cos}$. Toute ceci sera approfondi au chapitre XI.

✍ **Exercice IV.5.** Démontrer que la fonction arcos + arcsin est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

Proposition IV.7. La fonction suivante est une fonction strictement croissante et continue admettant une réciproque :

$$\widehat{\tan} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan(x) .$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème II.4 et de l'étude précedemment menée de la fonction tangente. □

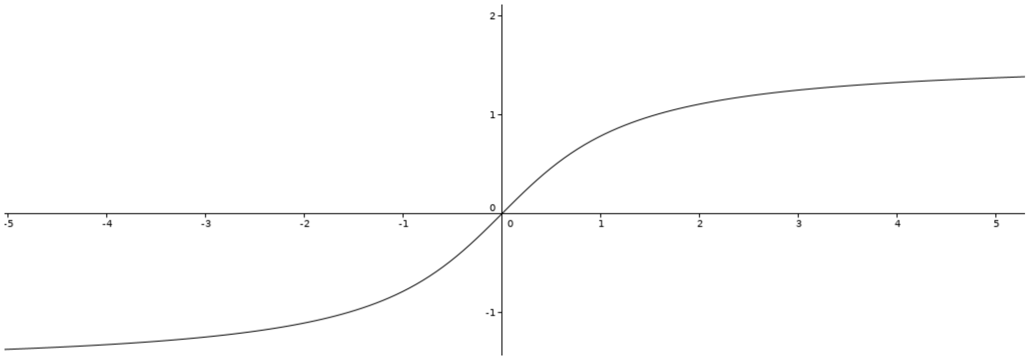
Définition IV.5. On appelle **fonction arc tangente** la réciproque de la fonction $\widehat{tan}$.

Notation. $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Proposition IV.8. La fonction arctan est une fonction continue impaire strictement croissante. De plus :
- $\arctan(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\pi/2$;
- arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} .$$

Pour conclure, nous reproduisons ci–ensuite l'allure de la courbe représentative de la fonction arctan.



✍ **Exercice IV.6.** Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2.⁻ Trigonométrie hyperbolique

a) Cosinus et sinus hyperboliques

Définition IV.6. Soit $x \in \mathbb{R}$; on appelle :

— **cosinus hyperbolique de** x le réel

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$

— **sinus hyperbolique de** x le réel

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ .$$

✌ **Remarque IV.4.** Ces formules nous permettent de définir deux fonctions $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition IV.9. On a les résultats suivants :

(i) la fonction ch est paire ;

(ii) la fonction sh est impaire ;

(iii) les fonctions *ch* et sh sont dérivables ; de plus $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$;

(iv) pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1\ .$$

Démonstration. Il s'agit d'une succession de calculs immédiats. □

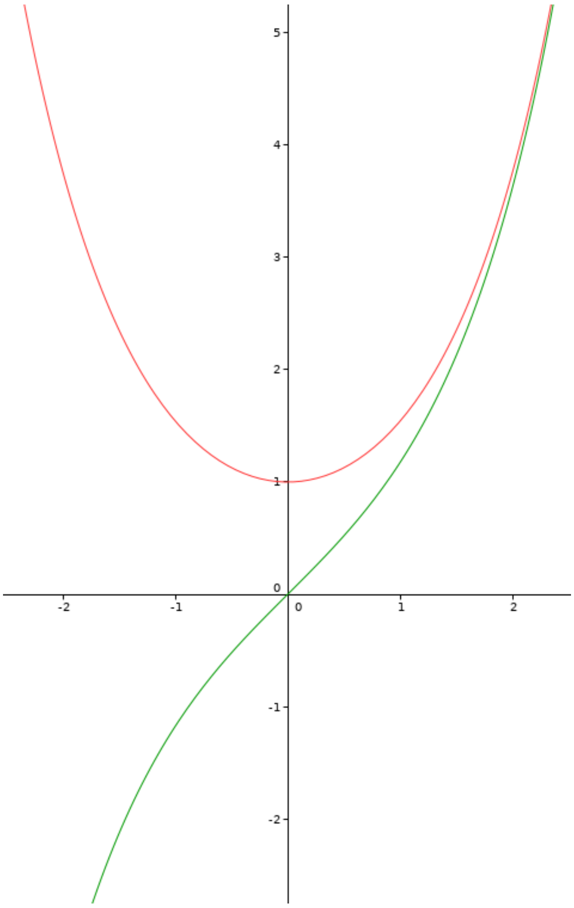
Pour terminer, une brève étude de fonction révèle de plus les propriétés suivantes :

— ch est strictement positive, de valeur minimale $1 = \mathrm{ch}(0)$;

— $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \infty$;

— $\operatorname{sh}(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$.

Ceci nous permet de déduire l'allure des courbes représentatives de ces deux fonctions, reproduite ci–ensuite (ch en rouge, sh en vert).



b) Tangente hyperbolique

Définition IV.7. Soit $x \in \mathbb{R}$; on appelle **tangente hyperbolique de x** la quantité

$$\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \, .$$

Notation. $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

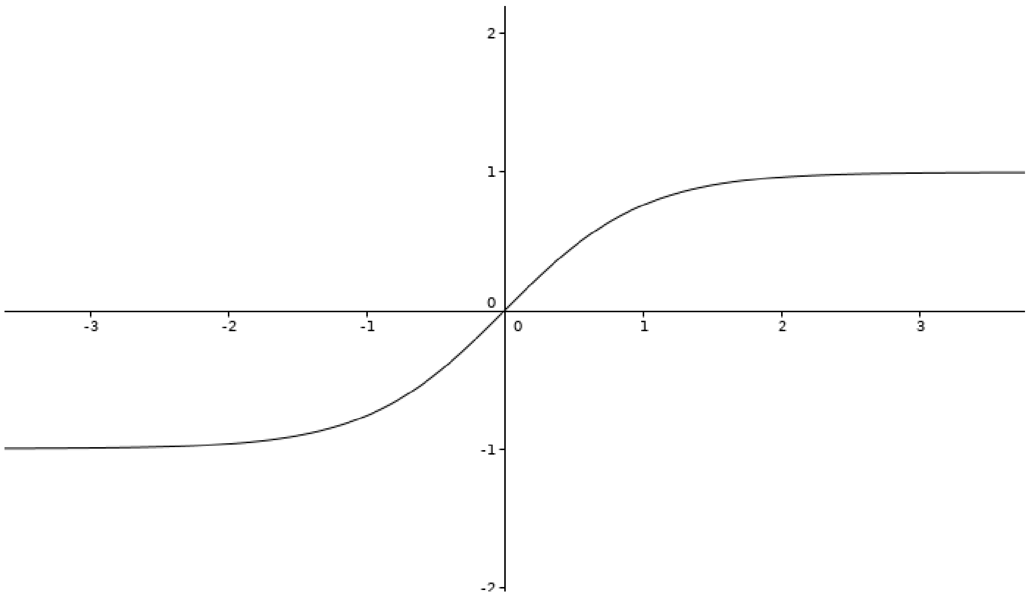
Proposition IV.10. La fonction th est impaire, strictement croissante et dérivable. Sa dérivée vérifie :

$$\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2 \, .$$

Un rapide calcul utilisant l'expression $\operatorname{th}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ nous permet de déduire que (mettre en facteur le terme dominant au numérateur et dénominateur) :

$$\operatorname{th}(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm 1 \, .$$

Nous sommes donc en mesure de tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction th.



3.– Puissances

a) C'est quoi ?

Définition IV.8. Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** a la fonction

$$\begin{aligned} \phi_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{a\ln(x)} \end{aligned} .$$

Notation. Pour $x > 0$, on notera $x^a = \phi_a(x)$.

Remarque IV.5.

— Si a est un entier positif, $\phi_a(x) = \underbrace{x \times \ldots \times x}_{a \text{ fois}}$. On retrouve la définition usuelle de la puissance, ce qui est bienvenu. La fonction ϕ_a est alors bien définie sur $\mathbb{R}$.

— Si a est un entier strictement négatif,

$$\phi_a(x) = \underbrace{\frac{1}{x} \times \ldots \times \frac{1}{x}}_{a \text{ fois}} .$$

La fonction ϕ_a est alors bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

— Dans tous les autres cas, la fonction ϕ_a n'est *a priori* bien définie que pour x **strictement positif**.

Exemple IV.1. Vous connaissez sans doute ϕ_2, ϕ_3 et leurs amies ; mais connaissez–vous ϕ_π ? Ou $\phi_{\frac{1}{2}}$?

Proposition IV.11. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $x^a y^a = (xy)^a$;

(ii) $x^a x^b = x^{a+b}$;

(iii) $(x^a)^b = x^{ab}$;

(iv) $1^a = 1 = x^0$;

(v) $x^a = \dfrac{1}{x^{-a}}$

(vi) $\ln(x^a) = a\ln(x)$.

Démonstration. Utiliser la forme exponentielle. □

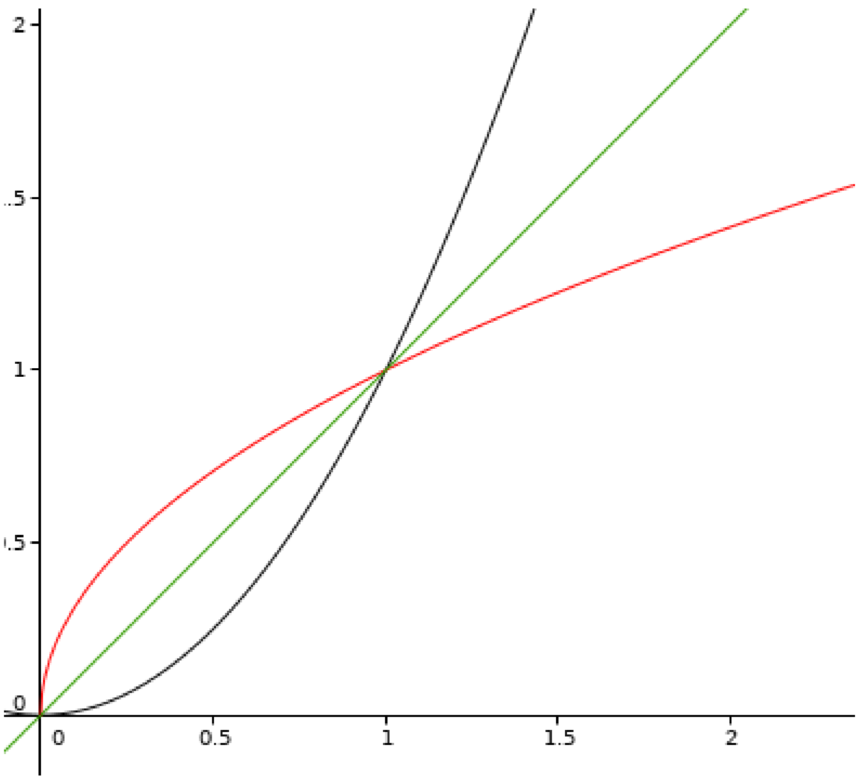
b) Variations

En utilisant la formule de dérivée d'une composée, on trouve, pour $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$:

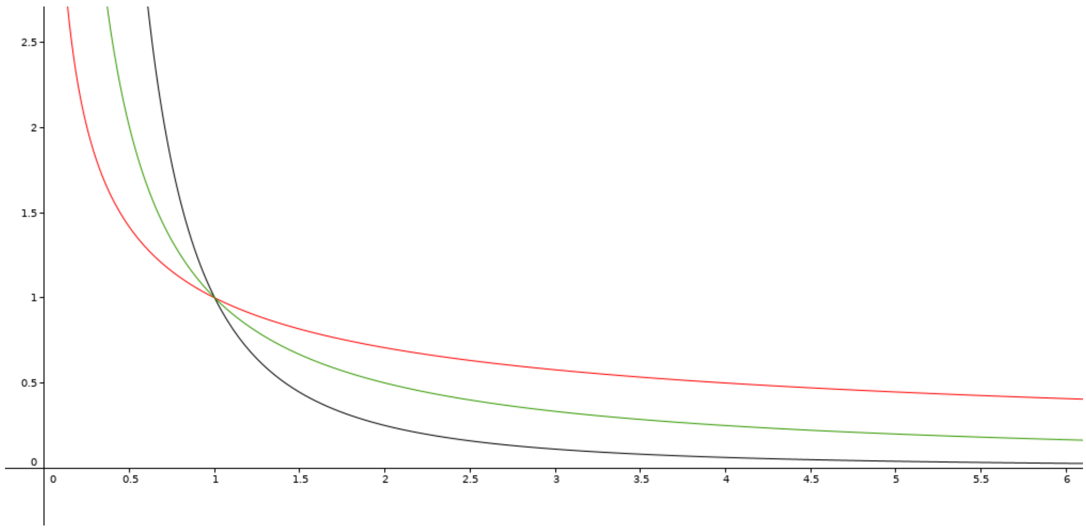
$$\boxed{\phi_a'(x) = a x^{a-1}\ .}$$

On retrouve de cette façon les dérivées usuelles suivantes vues en terminale : puissances entières, mais aussi puissances inverses, racine carrée. Cette formule est un véritable couteau suisse de la dérivation.

Concernant les limites, on remarque aisément que, si $a > 0$, $\phi_a(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Ceci nous permet de poser la convention suivante : $0^a = 0$ pour tout $a > 0$. Ceci est à **ne pas confondre** avec x^0, qui vaut 1 quel que soit x et ce sans aucune ambiguïté. Pour l'allure des courbes, on différencie aisément les exposants $a > 1$ (forme parabolique convexe) des exposants $0 < a < 1$ (forme concave, penser racine carrée). Nous justifierons ces variations dans le paragraphe suivant.



La formule de la dérivée ci–dessus nous permet de justifier les variations vues précédemment dans le cas $a > 0$; le cas $a < 0$ apporte quant à lui son lot de courbes décroissantes, comme illustré ci–ensuite. Cette fois ci, les courbes dominantes à l'infini sont celles pour $|a| < 1$.



c) Racines

Définition IV.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; la fonction $\phi_{\frac{1}{n}}$ est appelée **racine n–ième**.

Notation. $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Soit $x > 0$ et soit $n \geq 1$; effectuons un petit calcul :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x^n} &= \phi_{\frac{1}{n}}(x^n) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x^n)\right) \\ &= \exp(\ln(x)) \\ &= x\ . \end{aligned}$$

De la même façon, on vérifie que $(\sqrt[n]{x})^n = x$: **la fonction $\phi_{\frac{1}{n}}$ est donc la réciproque de ϕ_n.**

✌ **Remarque IV.6.**

— Si n est impair, il est possible d'étendre la fonction $\phi_{\frac{1}{n}}$ à $\mathbb{R}$ tout entier.
— Les fonctions racine ne sont jamais dérivables en 0.