

Chapitre III

Nombres réels

1. Le corps \mathbb{R} des nombres réels

a) C'est quoi ?

L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est muni d'une addition, d'une multiplication et d'une division (par des nombres non nuls). Un tel ensemble (en gros, *cf.* chapitre VIII) est appelé un **corps**.

b) Sous-ensembles remarquables

Théorème III.1.

Il existe deux parties de \mathbb{R} , notées \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- , telles que :

- (A) $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$;
- (B) $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$;
- (C) \mathbb{R}_+ est stable par addition et multiplication ;
- (D) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x \in \mathbb{R}_+) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{R}_-)$.

Démonstration. Nous ne disposons pas, hélas, de l'outillage technique requis pour aborder cette démonstration. Ce résultat sera donc admis. \square

✂ Remarque III.1.

- Si on pose $\mathbb{R}_\pm^* = \mathbb{R}_\pm \setminus \{0\}$, alors \mathbb{R} est égal à la réunion disjointe $\mathbb{R}_+^* \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}_-^*$.
- \mathbb{R}_- est stable par addition ; en effet, si $x, y \in \mathbb{R}_-$ alors $x+y = -\underbrace{((-x) + (-y))}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_-$.

Corollaire III.1.a. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

- (i) $(x \in \mathbb{R}_+) \wedge (y \in \mathbb{R}_-) \Rightarrow (xy \in \mathbb{R}_-)$;
- (ii) $(x \in \mathbb{R}_-) \wedge (y \in \mathbb{R}_-) \Rightarrow (xy \in \mathbb{R}_+)$;
- (iii) $x^2 \in \mathbb{R}_+$;
- (iv) $1 \in \mathbb{R}_+$ et $-1 \in \mathbb{R}_-$;
- (v) $(x \in \mathbb{R}_+^*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*\right)$.

Démonstration.

- (i) Si $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_-$ alors $xy = -x \underbrace{(-y)}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_-$.
- (ii) Si $x, y \in \mathbb{R}_-$ alors $-x, -y \in \mathbb{R}_+$ et donc $xy = (-x)(-y) \in \mathbb{R}_+$.
- (iii) Cela découle du (ii) et du (C) du théorème.
- (iv) $1 = 1^2 \in \mathbb{R}_+$ donc $-1 \in \mathbb{R}_-$.
- (v) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; alors si $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_-$ nous aurions $1 = x \times \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_-$, ce qui contredit le point (iv).

□

c) Ordre naturel sur \mathbb{R}

Définition III.1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On note :

- $x \leq y$ si $y - x \in \mathbb{R}_+$;
- $x < y$ si $y - x \in \mathbb{R}_+^*$.

▮ **Exemple III.1.** $3 < \pi$.

Proposition III.2. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :

- (i) $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$;
- (ii) $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$;
- (iii) $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Démonstration.

- (i) Si $(x \leq y) \wedge (y \leq x)$, alors $x - y \in \mathbb{R}_+$ et, comme $-(x - y) = y - x \in \mathbb{R}_+$, $x - y \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$. Au final, $x = y$.
- (ii) Si $x \leq y$ et $y \leq z$. Alors :

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbb{R}_+$$

d'où $x \leq z$.

(iii) Remarquons que $y - x \in \mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$. Ainsi, $(y - x \in \mathbb{R}_+) \vee (y - x \in \mathbb{R}_-)$, i.e $(x \leq y) \vee (y \leq x)$. □

Vocabulaire. Nous dirons (cf. chapitre V) que la relation " \leq " est un ordre total sur \mathbb{R} .

☞ **Remarque III.2.** Notons au passage que " $<$ " ne risque pas d'être un ordre total ; cette relation n'est pas réflexive !

Proposition III.3. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :

- (i) $(x < y) \Leftrightarrow (x + z < y + z)$;
- (ii) si $z \in \mathbb{R}_+^*$, $(x < y) \Leftrightarrow (xz < yz)$;
- (iii) si $z \in \mathbb{R}_-^*$, $(x < y) \Leftrightarrow (xz > yz)$.

Démonstration.

(i)

$$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow (y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow x + z < y + z . \end{aligned}$$

(ii) Si $z > 0$ alors :

$$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow z(y - x) = zy - zx \in \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow xz < yz . \end{aligned}$$

(iii) Si $z < 0$ alors :

$$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow z(y - x) = zy - zx \in \mathbb{R}_-^* \\ &\Leftrightarrow xz > yz . \end{aligned}$$

☞ **Remarque III.3.** En exercice, il n'y a aucune honte à faire usage de tableaux de signes "à étages" et autres techniques de ce type pour résoudre des inéquations mettant en jeu des produits... □

Proposition III.4. Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq x'$ et $y \leq y'$. Alors :

$$x + y \leq x' + y' .$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $x' + y' - (x + y) = (x' - x) + (y' - y) \in \mathbb{R}_+$. □

✘ **ATTENTION** : si on peut sommer des inégalités, il est **absolument exclus de les soustraire**. En effet $0 \leq 1$ et $-1 \leq 1$ mais, aux dernières nouvelles, $1 \not\leq 0$... Il en va de même pour les produits : $0 \leq 1$ et $-2 \leq -1$ mais $0 > -1$.

d) Valeur absolue

Définition III.2. Soit $x \in \mathbb{R}$; on appelle **valeur absolue** de x le réel $\max(x, -x)$.

Notation. $|x|$

✂ **Remarque III.4.** Notons que $x \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow |x| = x$ et $x \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow |x| = -x$.

Proposition III.5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

- (i) $|x| \in \mathbb{R}_+$;
- (ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (iii) $|xy| = |x||y|$;
- (iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ [**inégalité triangulaire 1**] ;
- (v) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ [**inégalité triangulaire 2**].

Démonstration.

- (i), (ii) Conséquences immédiates de la remarque III.4.
- (iii) Laissez en exercice au lecteur ; procéder par disjonction de cas selon les signes respectifs de x et y et utiliser (pour changer) la remarque III.4.
- (iv) **Point méthode : comment gérer un maximum.**
Par définition, $|x + y| = \max(x + y, -x - y)$, or :
— $x + y \leq |x| + |y|$;
— $-x - y = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$.
Ainsi, $|x + y| = \max(x + y, -x - y) \leq |x| + |y|$.
- (v) Échanger les rôles de x et y ne change rien à l'expression souhaitée : nous pouvons donc supposer, quitte à échanger x et y , que $|x| \geq |y|$. Remarquons alors que $x = x - y + y$; certes, me direz vous... Mais, en utilisant la première inégalité triangulaire, on obtient :

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

et donc $|x| - |y| \leq |x - y|$. Comme $|x| \geq |y|$, on a bien :

$$||x| - |y|| = |x| - |y| \leq |x - y| .$$

□

✂ **Remarque III.5.** Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > 0$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq b\}$ est égal à l'intervalle $[a - b, a + b]$ (faire un dessin).

2. Bornes supérieure, inférieure

a) C'est quoi ?

Définition III.3. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On appelle **borne supérieure** (ou supremum) de A le plus petit élément (si il existe) de l'ensemble des majorants de A .

Notation. $\sup(A)$

En résumé, la borne supérieure est le **plus petit majorant de l'ensemble** A , lorsque ce dernier existe, *i.e* :

$$\sup(A) = \min\{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, a \leq x\}.$$

On déduit de cette reformulation une caractérisation de la borne supérieure, à privilégier en pratique : pour tout $M \in \mathbb{R}$,

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall y < M, \exists x \in A, y < x \end{cases} \quad (\mathbf{E : III.1})$$

▮ **Exemple III.2.** La borne supérieure de $[0, 1[$ est 1. En effet :

- pour tout $x \in [0, 1[$, $x \leq 1$ donc 1 majore bien $[0, 1[$;
- si $z < 1$, alors soit $z \leq 0$ et dans ce cas $\frac{1}{42} > z$ soit $z \in [0, 1[$ et alors $\frac{z+1}{2} \in [0, 1[$ et $z < \frac{z+1}{2}$. 1 est donc le plus petit majorant de $[0, 1[$.

On peut définir de façon analogue le concept de borne inférieure d'un ensemble, qui sera alors son **plus grand minorant**.

Définition III.4. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On appelle **borne inférieure** (ou infimum) de A le plus grand élément (si il existe) de l'ensemble des minorants de A .

Notation. $\inf(A)$

✖ **ATTENTION** : l'existence de telles quantités est très loin d'être automatique : en effet, quelle pourrait être la borne supérieure de \mathbb{Z} ?

Dans toute la suite de ce chapitre, lorsque nous énoncerons un résultat relatif aux bornes supérieures, nous laissons le soin au lecteur d'en déduire un énoncé analogue s'appliquant aux bornes inférieures. Par exemple, la proposition suivante a pour pendant : lorsqu'un minimum existe, la borne inférieure existe et lui est égale.

Proposition III.6. Soit $A \subset \mathbb{R}$ possédant un plus grand élément, alors :

- A admet une borne supérieure ;
- $\sup(A) = \max(A)$.

✋ **Remarque III.6.** La réciproque est **FAUSSE** : penser à $[0, 1[$ qui admet une borne supérieure mais pas de maximum.

Démonstration. Posons $a = \max(A)$ et $A^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in A, y \leq x\}$ l'ensemble des majorants de A . Alors :

- il est clair que $a \in A^+$;
- $a \in A$ donc $\forall x \in A^+, x \geq a$.

Par caractérisation de la borne supérieure (**E :III.1**), on a bien $a = \sup(A)$. \square

\heartsuit **Remarque III.7.** Si A possède une borne supérieure, alors A est automatiquement majorée.

b) Théorème fondamental

Même si la démonstration du théorème suivant dépasse le cadre du programme de MPSI, le résultat en est absolument remarquable et formera la pierre angulaire de la suite de ce chapitre.

Théorème III.7.

Toute partie de \mathbb{R} non vide et majorée admet une borne supérieure.

\blacktriangleright **Exemple III.3.** Si on voit la partie $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ comme un sous-ensemble de \mathbb{R} , il admet une borne supérieure, qui est $\sqrt{2}$.

Afin de faciliter la vie de notre estimé lecteur, nous profitons de ce paragraphe pour anticiper sur un résultat qui sera démontré dans le chapitre **VII**.

Proposition III.8. [Caractérisation séquentielle de la borne supérieure] Soit $A \subset \mathbb{R}$ et soit $M \in \mathbb{R}$; alors :

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M \end{cases} .$$

\blacktriangleright **Exemple III.4.** 0 est la borne inférieure de \mathbb{Q}_+^* dans \mathbb{R} ; en effet, il est clair qu'il minore cet ensemble et

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{\in \mathbb{Q}_+^*} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 .$$

c) Droite réelle achevée

Débutons ce paragraphe par fixer deux symboles, $-\infty$ et $+\infty$, sans signification particulière et posons :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} .$$

Cet ensemble est appelé **droite réelle achevée**.

Nous pouvons étendre l'ordre naturel de \mathbb{R} à $\overline{\mathbb{R}}$ via les conventions suivantes :

- $-\infty < +\infty$;
- si $y \in \mathbb{R}$, alors $-\infty < y < +\infty$.

On en déduit en particulier que $\overline{\mathbb{R}}$ admet un maximum et un minimum, respectivement égaux à $+\infty$ et $-\infty$.

De même, les deux opérations classiques sur \mathbb{R} peuvent (presque) être généralisées à \mathbb{R} via les tables partielles suivantes.

+	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$?
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$?	$+\infty$	$+\infty$

\times	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_+^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$?	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$?	$+\infty$	$+\infty$

Notons que ces tables sont symétriques : les opérations étendues demeurent donc commutatives. Ces conventions nous seront, comme vous pouvez sans doute l'imaginer, très utiles pour nos futures études de limites.

☞ **Remarque III.8.** Il serait possible sans grand risque¹ de convenir du fait que $\frac{1}{\pm\infty} = 0$. Il n'est toutefois pas possible de convenir d'une valeur cohérente pour $\frac{1}{0}$ (quel serait son signe?).

Proposition III.9. Toute partie A de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure, dans le sens où les quantités

$$\sup(A) = \min\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall a \in A, a \leq x\} \quad \text{et} \quad \inf(A) = \max\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall a \in A, a \geq x\}$$

existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Démontrons l'existence de la borne supérieure de A ; une démonstration similaire livrera alors celle de sa borne inférieure.

Cas 1 : $A = \emptyset$ ou $A = \{-\infty\}$. Alors dans ce cas l'ensemble des majorants de A est $\overline{\mathbb{R}}$ entier, ce qui entraîne que A admet pour borne supérieure $-\infty = \min(\overline{\mathbb{R}})$.

Cas 2 : $+\infty \in A$. Dans ce cas, $\sup(A) = \max(A) = +\infty$.

Cas 3 : $B = A \setminus \{-\infty\}$ est un sous ensemble non vide \mathbb{R} . Si l'ensemble B est majoré, d'après le théorème III.7, il admet une borne supérieure qui sera également celle de A . Dans le cas contraire, $\sup(A) = +\infty$.

□

☞ **Remarque III.9.** Une conséquence intéressante de tout ceci est que, si $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ est non vide, alors :

$$\inf(A) \leq \sup(A) .$$

✘ **ATTENTION :** l'inégalité est inversée dans le cas de l'ensemble vide, dont la borne supérieure est $-\infty$ et la borne inférieure $+\infty$.

1. Hors du quotient de l'infini par lui-même, mais à ce stade, qui compte...

3. Quelques résultats de topologie

a) Partie entière

Proposition/définition III.5. Soit $x \in \mathbb{R}$; alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$n \leq x < n + 1 .$$

Cet entier n est alors appelé **partie entière** (par défaut) de x .

Notation. $\lfloor x \rfloor, E(x)$.

▣ **Exemple III.5.** $\lfloor 1, 25 \rfloor = 1, \lfloor -2, 7 \rfloor = -3$.

Démonstration. Commençons par démontrer l'existence.

— *Cas 1 : $x \geq 0$.* L'ensemble

$$\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\} \subset \mathbb{N}$$

est non vide, par axiome **D**, admet un plus petit élément n_0 . Il est alors clair que $n = n_0 - 1$ vérifie l'inégalité voulue.

— *Cas 2 : $x < 0$.* On procède de façon similaire, avec *in fine* l'entier (dont il faut montrer l'existence!)

$$n_0 = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

convenant à la condition souhaitée.

Pour démontrer l'unicité, supposons que nous disposions de deux entier n, p vérifiant l'égalité voulue, *i.e*

$$n \leq x < n + 1 \quad \text{et} \quad p \leq x < p + 1$$

qui implique

$$n \leq x < p + 1$$

et donc $n < p + 1$, d'où $n \leq p$. De façon symétrique, on obtient $p \leq n$, *ergo* $n = p$. \square

✂ **Remarque III.10.**

— $\lfloor x \rfloor$ est caractérisée par :

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \end{cases} .$$

— Si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x .$$

— $\lfloor x \rfloor$ est parfois appelée *plancher* de x ; il existe également un plafond, noté $\lceil x \rceil$ et caractérisé par :

$$\begin{cases} \lceil x \rceil \in \mathbb{Z} \\ \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil \end{cases} .$$

Une application classique de la notion de partie entière est l'**approximation d'un réel à 10^{-n} près**, pour $n \geq 0$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$x_n = \frac{[10^n x]}{10^n}.$$

Alors, comme

$$[10^n x] \leq 10^n x < [10^n x] + 1$$

on a bien :

$$x_n \leq x < x_n + 10^{-n} \quad \text{i.e.} \quad |x - x_n| < 10^{-n}.$$

▮▮▮ **Exemple III.6.** $\pi = 3.14$ à 10^{-2} près.

b) Résultats de densité

Proposition III.10. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Alors il existe un rationnel $\zeta \in \mathbb{Q}$ et un irrationnel $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que :

- $x \leq \zeta \leq y$;
- $x \leq \tau \leq y$.

✂ **Remarque III.11.** En itérant ce procédé, on en déduit qu'entre deux réels distincts il existe une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels. On dit que \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont **denses dans \mathbb{R}** .

Démonstration. Posons $\varepsilon = y - x$; alors, comme $\varepsilon > 0$, en posant $q = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}^*$,

on a $q > \frac{1}{\varepsilon}$, i.e

$$0 < \frac{1}{q} < \varepsilon = y - x.$$

On pose ensuite $p = [qx] + 1 \in \mathbb{Z}$, de sorte que $p - 1 \leq qx < p$ et donc :

$$\frac{p-1}{q} \leq x < \frac{p}{q}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x &< \frac{p}{q} = \frac{p-1+1}{q} \\ &\leq x + \frac{1}{q} \\ &\leq x + \varepsilon \\ &= y. \end{aligned}$$

On en déduit que le rationnel $\zeta = \frac{p}{q}$ est contenu dans le segment $[x, y]$. Un raisonnement identique remplaçant q par $q\sqrt{2}$ dans tout ce qui précède nous permet de démontrer que l'irrationnel $\tau = \frac{p}{q\sqrt{2}}$ appartient à ce même segment. \square

c) Intervalles

Rappelons que les intervalles de \mathbb{R} sont les neuf familles d'ensembles suivants, pour $a, b \in \mathbb{R}$:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ **[segment]** ;
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a > x \leq b\}$;
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$;
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;
- $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$;
- $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$;
- $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

✂ Remarque III.12.

- Les quatre premier types d'intervalles ci-dessus sont bornés, les autres non.
- Si $a > b$, l'intervalle $[a, b]$ est vide. Ceci signifie en particulier que \emptyset est un intervalle.
- **Certains** (pas tous !) intervalles sont dits **ouverts** ou **fermés**, comme résumé dans le tableau *infra*.

Ouvert	Fermé
$]a, b[$	$[a, b]$
$]a, +\infty[$	$[a, +\infty[$
$] - \infty, b[$	$] - \infty, b]$
\emptyset	\emptyset
\mathbb{R}	\mathbb{R}

Définition III.6. Une partie A de \mathbb{R} est dite **convexe** si :

$$\forall x, y \in A, \quad [x, y] \subset A.$$

▣ **Exemple III.7.** Les intervalles sont clairement convexes. L'ensemble \mathbb{R}^* ne l'est pas car (par exemple) $[-1, 1] \not\subset \mathbb{R}^*$.

Proposition III.11. Les convexes de \mathbb{R} sont exactement les intervalles.

Démonstration. Ceci est une ébauche de démonstration. Nous venons de voir que les intervalles étaient convexes ; reste à montrer la réciproque. Soit donc $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble convexe.

Cas 1 : $A = \emptyset$. Youpi.

Cas 2 : $A \neq \emptyset$.

Cas 2.1 : A n'est ni majoré ni minoré. A est alors égal à \mathbb{R} .

Cas 2.2 : A est majoré et minoré. A admet alors une borne supérieure b et une borne inférieure a et $A =]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b]$.

Cas 2.3 : A est (par exemple) minorée et non majorée. Posons $a = \inf(A)$ et montrons que $A =]a, \infty[$ ou $[a, \infty[$. L'inclusion de gauche à droite est évidente ; prenons ensuite $z > a$ et montrons que $z \in A$. Comme z ne peut minorer A , il existe alors $x \in A$ tel que $x < z$ et comme A n'est pas majorée, il existe $y \in A$ tel que $z < y$. Le réel z est donc compris dans le segment $[x, y]$ qui est inclus dans A par convexité, donc $z \in A$.

□

Proposition III.12 (Paramétrage d'un segment). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Alors :

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Démonstration. Si $a = b$, ceci est trivial. Sinon, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x \in [a, b] &\iff a \leq x \leq b \\ &\iff 0 \leq x - a \leq b - a \\ &\iff 0 \leq \frac{x - a}{b - a} \leq 1 \end{aligned}$$

d'où le résultat en remarquant que :

$$x = \left(1 - \frac{x - a}{b - a}\right)a + \frac{x - a}{b - a}b.$$

□

✂ **Remarque III.13.** Si $a < b$, l'application $\lambda \mapsto (1 - \lambda)a + \lambda b$ réalise de plus une bijection de $[0, 1]$ dans $[a, b]$.

Corollaire III.12.a. Une partie $I \subset \mathbb{R}$ en est un intervalle si et seulement si :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in I$$