Chapitre II

Rappels et compléments calculatoires

1.⁻ Fonctions d'une variable réelle

a) C'est quoi ?

Soit X un ensemble (pour le moment, un intervalle ou une réunion d'intervalles style $[0,1]$, $[0,12[$ ou $\mathbb{R}^*$). On appelle **fonction** de X à valeurs dans $\mathbb{R}$ tout "mécanisme" $f : X \to \mathbb{R}$ affectant à tout point $x \in X$ une valeur numérique $f(x) \in \mathbb{R}$.

➠ **Exemple II.1.** Vous en avez vu des centaines en terminale (j'espère) : $x \mapsto x^2$, sin, exp et j'en passe ...

Notation. Nous utiliserons la convention suivante pour définir une fonction :

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

ou, lorsque X est clair, $f : x \mapsto f(x)$. Dans tous les cas, nous n'écrirons **PAS** d'horreurs du style "la fonction $f(x) = \ldots$" J'aime à croire que nous sommes des gens civilisés.

Définition II.1. L'ensemble X maximal des valeurs de x pour lesquelles l'expression $f(x)$ a un sens est appelé **ensemble de définition** de la fonction f.

➠ **Exemple II.2.** L'ensemble de définition de $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est $[1, +\infty[$.

Définition II.2. Étant donné deux fonctions $f, g : X \mapsto \mathbb{R}$ nous pouvons définir :
- leur **somme** $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ sur X ;
- leur **produit** $f \times g : x \mapsto f(x)g(x)$ sur X ;
- leur **quotient** $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ sur l'ensemble des $x \in X$ tels que $g(x) \neq 0$.

De plus, si les valeurs d'une fonction g sont comprises dans l'ensemble de définition d'une fonction f, on peut définir la **composée** de f par g via :

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x)) \ .$$

Nous aurons l'occasion de revenir en détails sur cette notion ultérieurement.

Exemple II.3. La fonction composée de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2$ est $f \circ g : x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$, définie sur $\mathbb{R}$ (pourquoi ?).

Remarque II.1. Si $a \in \mathbb{R}$, il est relativement aisé, connaissant la courbe d'une fonction f, d'en déduire l'allure de $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$ lorsque ces composées ont un sens.

Définition II.3. Soient f, g deux fonctions définies sur un ensemble X. On dira que f est **inférieure ou égale** à g si, pour **tout** $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$.

Notation. $f \leq g$

Remarque II.2.

- On définit de la même façon les relations $\geq, <, >$ et $=$ sur les fonctions.
- **Attention : il s'agit d'ordres partiels.** Comparer par exemple $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.
- Graphiquement, $f \leq g$ si la courbe représentative de f est **toujours** au dessus de celle de g.

◇ Fonctions bornées

Définition II.4. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

- **majorée** si il existe un réel M tel que pour tout $x \in X$; $f(x) \leq M$;
- **minorée** si il existe un réel m tel que pour tout $x \in X$; $f(x) \geq m$;
- **bornée** si elle est majorée **et** minorée.

Remarque II.3. Une fonction f est bornée si et seulement si la fonction $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est majorée.

Exemple II.4. La fonction $x \mapsto x^2$ est bornée sur $[0, 1]$ mais pas sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est bornée sur $[1, \infty[$.

◇ Monotonie

Définition II.5. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

- **croissante** (resp. strictement croissante) si pour tous $x, y \in X$ tels que $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$) ;
- **décroissante** (resp. strictement décroissante) si pour tous $x, y \in X$ tels que $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$) ;
- **monotone** si elle est croissante **ou** décroissante.

Exemple II.5. La fonction $x \mapsto x^3 - 17$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Elle y est donc monotone.

Remarque II.4.

— La somme de deux fonctions croissantes est croissante. Par contre, on ne peut rien dire de la différence d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ...
— Soyez gentils, **ne confondez pas monotone** (croissant ou décroissant) **et constante** (toujours égale à la même valeur, donc *de facto* croissante et décroissante).

Proposition II.1. La composée de deux fonctions monotones suit la "règle des signes".

➠ **Exemple II.6.** Monotonie des fonctions $x \mapsto e^{x^2}$ (croissante) et $x \mapsto e^{-x^2}$ (décroissante).

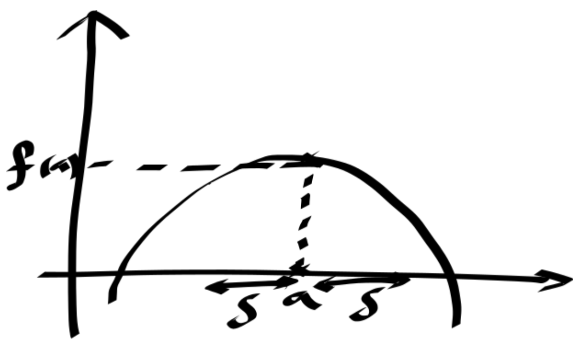
◇ **Parité**

Définition II.6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ **symétrique** par rapport à 0. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est :
— **paire** si, pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$;
— **impaire** si, pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

➠ **Exemple II.7.** Puissances paires et impaires, cosinus, sinus.

✌ **Remarque II.5.** La parité apporte des informations intéressantes relatives aux courbes représentatives : celle d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle d'une fonction impaire par rapport à l'origine. Ceci permet de réduire le domaine pertinent lors de l'étude d'une fonction.

◇ **Extrema**



Définition II.7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $a \in I$, on dit que :
— f admet un maximum local en a si :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad (|x-a| \leq \delta) \Rightarrow (f(x) \leq f(a)) ;$$

— f admet un minimum local en a si :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad (|x-a| \leq \delta) \Rightarrow (f(x) \geq f(a)) .$$

Remarque II.6.
- **Attention :** caractère **local** de ces notions ; le voir sur des exemples type cos.
- Si la dernière inégalité de la définition est vraie sur I, on parle d'extremum global. Jeter un oeil à $x \mapsto \sin(x)e^{-x}$.

b) Dérivation

Ce paragraphe a vocation à n'être qu'un assemblage de recettes de cuisine pour débuter l'année. Tout ce qui suit sera démontré et mis en place proprement ultérieurement. Demain, on rase gratis.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note f' sa fonction dérivée. Si elle est dérivable plusieurs fois de suite, on notera $f'', f^{(3)}, \dots, f^{(k)}$ ses dérivées successives. On utilisera aussi quelques fois les notations de la physique, à savoir $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$. On n'écrire **PAS** d'abominations du type $(x^2+1)'$ ...Une dérivée est une fonction, traitons la comme telle.

Proposition II.2. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, sa tangente a pour équation

$$y = f(a) + (x-a)f'(a) \ .$$

◇ Opérations sur les dérivées

Logiquement, presque tout ceci est connu, mais il vaut mieux prévenir que guérir.

Proposition II.3. Soient f, g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $f + \lambda g$ est dérivable sur I et $(f+\lambda g)' = f' + \lambda g'$;

(ii) $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$;

(iii) si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \ ;$$

(iv) si g est à valeurs dans I, la composée $f \circ g$ est dérivable sur l'ensemble de dérivabilité de g et

$$(f \circ g)' = g' \times f' \circ g \ .$$

Exemple II.8. La formule (iv) permet de retrouver les formules de terminales sur $\ln(u)'$ (notation abominable et à proscrire désormais) et consorts.

◇ Monotonie et dérivées

Vous connaissez la musique en théorie : le signe de la dérivée est liée à la monotonie selon le schéma vu en terminale. Notons au passage que la monotonie est stricte lorsque f' ne s'annule qu'en des points isolés.

◇ **Réciproques**

Définition II.8. Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soient $f : I \to J$ et $g : J \to I$ deux fonctions. On dit que f et g sont **réciproques** si, pour tout $x \in J$ $f \circ g(x) = x$ et si, pour tout $x \in I$, $g \circ f(x) = x$.

Notation. g pourra alors être noté f^{-1} (et réciproquement, *pun intended*).

Exemple II.9.
- exp et ln sont réciproques sur leurs ensembles de définition respectifs ;
- idem pour $x \mapsto x^2$ et $\sqrt{\cdot}$.

Remarque II.7. Graphiquement, la courbe représentative de la réciproque d'une fonction s'obtient par symétrie relativement à la première bissectrice, *i.e* la droite d'équation $y = x$.

Le théorème qui suit est important, et sera démontré ultérieurement. Si vous avez l'impression que nous prenons de mauvaises habitudes, vous avez raison.

Théorème II.4 (Dérivée d'une réciproque)**.**
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to J$ une fonction dérivable telle que f' **ne s'annule pas** sur I et telle que tout élément de J admette un antécédent par f. Alors :

(i) f admet une réciproque f^{-1} dérivable sur J ;

(ii)
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} .$$

Exemple II.10. On peut retrouver la dérivée de l'exponentielle. Ne me remerciez pas, c'est mon métier.

c) Logarithmes, exponentielles

◇ **Le cas néperien**

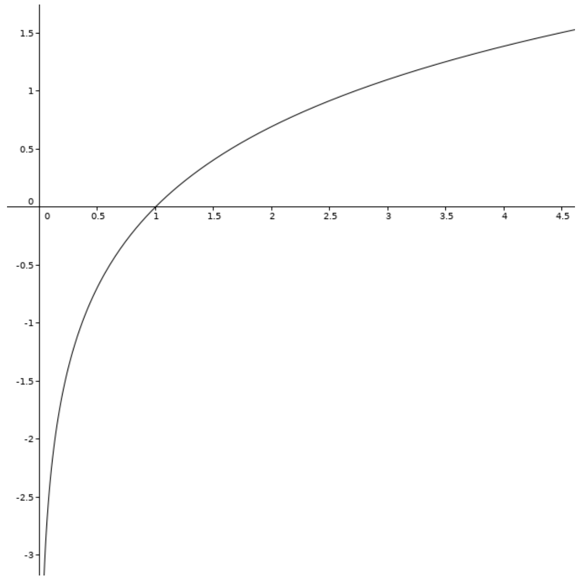
Point culture : le nom commun néperien vient de John Napier (francisé en Jean Neper), qui fut théologien, physicien, astronome, mathématicien et écossais et vécu de 1550 à 1617.

Définition II.9. On appelle **logarithme néperien** l'unique fonction, notée ln, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

(i) $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$;

(ii) $\ln(1) = 0$.

L'allure de la courbe représentative de cette fonction devrait vous être bien connu, mais réiterons la au cas où :



Proposition II.5.

(i) ln est strictement croissante ;

(ii) $\ln(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ et $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$;

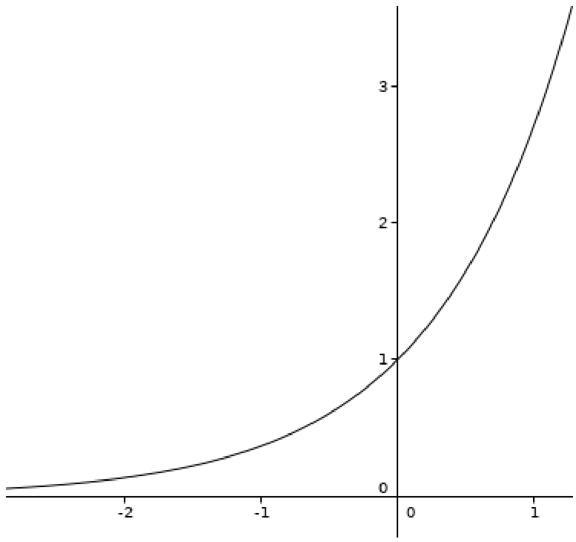
(iii) soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors :
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$;
- $\ln(x^y) = y\ln(x)$.

✌ **Remarque II.8.** Les puissances non–entières seront étudiées en détail au chapitre IV. En attendant, on se contentera de rappeler que si $x > 0$ on a $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Ceux parmi vous qui suivent auront remarqué que la dérivée du logarithme néperien ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$; le théorème II.4 entraîne donc que cette fonction admet une réciproque, dont la dérivée sera elle–même.

Définition II.10. La réciproque de la fonction ln, est appelée **exponentielle**.

Notation. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$



Proposition II.6.

(i) exp est strictement croissante, à valeurs strictement positives ;

(ii) $\exp(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ et $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$;

(iii) si on pose $e = \exp(1)$, alors $\ln(e) = 1$;

(iv) soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a alors :
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;
- $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
- $\exp(xy) = \exp(x)^y$.

(v) exp est dérivable et $\exp' = \exp$.

✌ **Remarque II.9.** La troisième formule du point (iv) justifie l'écriture "$\exp(x) = e^x$" vue en terminale et que nous utiliserons désormais lorsque cela nous semblera pertinent.

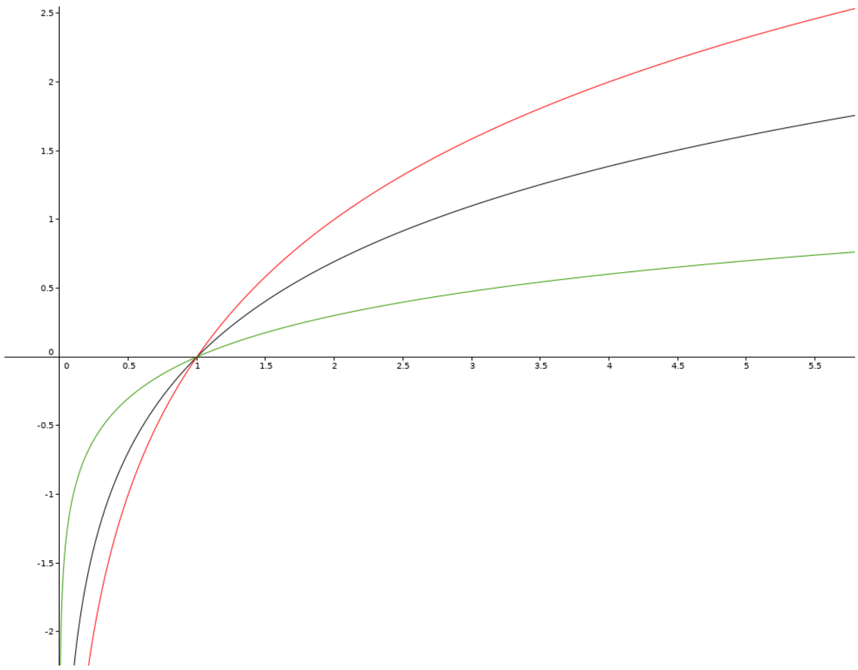
◇ **En base quelconque**

Définition II.11. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1. On appelle **logarithme en base** a la fonction

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad .$$

➠ **Exemple II.11.**
- Pour $a = 10$, on retrouve le logarithme décimal cher aux physiciens, souvent noté log.
- Pour $a = e$, pas de surprise, on obtient le logarithme néperien.
- Pour $a = 2$, on tombe sur le logarithme binaire, prisé des informaticiens, et parfois noté lg.

Les courbes de ces fonctions partagent une allure commune, modulo quelques différences d'inflexion. Plus la valeur de a est élevée, plus la courbe sera dominée à l'infini.



✌ **Remarque II.10.** Les logarithmes sont tous multiples du logarithme néperien : la proposition II.5 reste donc valide.

➠ **Exemple II.12.** Que dire du cas $0 < a < 1$?

✌ **Remarque II.11.** La réciproque d'un logarithme en base quelconque sera étudiée ultérieurement. Question sans rapport : que vaut $\log(10^{40})$?

d) Croissances comparées

✖ Ce qui suit est **absolument fondamental**, et sera démontré ultérieurement.

Proposition II.7. Soient $a, b > 0$; on a alors les limites suivantes :

(i)
$$\frac{(\ln(x))^b}{x^a} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \ ;$$

(ii)
$$x^a |\ln(x)|^b \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \ ;$$

(iii)
$$\frac{e^{ax}}{x^b} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \ ;$$

(iv)
$$x^b e^{-ax} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \ .$$

✌ **Remarque II.12.** La valeur absolue dans le (ii) n'est pas optionnelle : si $\ln(x) < 0$, on ne peut définir $\ln(x)^b$.

✍ **Exercice II.1.** Soit $x \in]-1, +\infty[$; démontrer que $\exp(x) \geq 1 + x$. En déduire que $\ln(1 + x) \leq x$.

2.⁻ Sommes, produits

L'objet de ce paragraphe est de présenter au lecteur quelques rudiments de calculs algébriques qui seront utilisés tout au long de l'année. Plusieurs notions apparaissant ici feront l'objet d'approfondissement ultérieurs.

a) Convention, notations

Fixons nous une famille de nombres réels (ou complexes) $a_0, \ldots a_n$. On notera :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \ldots + a_n \ .$$

✌ **Remarque II.13.** On rencontre parfois aussi la notation $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} a_k$.

Toutes les propriétés attendues pour une somme restent valables sous cette notation ; en particulier la "relation de Chasles"

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

est vérifiée pour tout $m \in [\![0, n-1]\!]$ et exprime le fait que

$$a_0 + \ldots + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = (a_0 + \ldots + a_m) + (a_{m+1} + \ldots + a_n) \ .$$

De la même façon, si λ est un nombre réel (ou complexe), on a naturellement :

$$\lambda \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k \ .$$

Légèrement plus technique, nous pouvons faire des changements d'indice, comme :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \ .$$

Notons qu'il est nécessaire que ces changements soient **bijectifs** : à chaque "nouvel" indice doit correspondre exactement un "ancien" indice.

➠ **Exemple II.13.**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \ .$$

✌ **Remarque II.14.**

— Lorsque I est un ensemble quelconque et que $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres réels (ou complexes) vérifiant que seul un nombre fini des a_i sont non nuls (on parle de **famille presque nulle**), on généralise la notation *supra* en notant $\sum_{i\in I} a_i$ la somme (**finie**) des termes non nuls de la famille.

— Par convention, on a $\sum_{x\in\emptyset} x = 0$.

De la même manière, nous définissons la notation "produit" :

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times \ldots \times a_n \ .$$

Notons que si $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\prod_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{n} a_k \ .$$

Notons que le produit d'une famille infinie presque nulle sera... nul et que, par convention, on pose $\prod_{x\in\emptyset} x = 1$. Il est possible d'effectuer des changements d'indice sur les produits de façon similaire à ce qui a été vu pour les sommes.

b) Exemples fondamentaux

Proposition II.8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

(i)

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ ;$$

(ii)

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

Démonstration. Faisons le (i), *i.e* démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n) \ : \ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ \text{ est vraie.}$$

— $\mathscr{P}(0)$ est trivialement vérifiée.

— Supposons $\mathscr{P}(n)$ vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= n+1+\sum_{k=0}^{n} k \\
&= n+1+\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$.
La propriété était initialisée et héréditaire, elle est vérifée sur $\mathbb{N}$. Le point (ii) se traite de façon similaire. $\square$

✍ **Exercice II.2.** Démontrer que si $n \geq 0$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Proposition II.9. Soit $x \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Le cas $x = 1$ est trivial. Dans le cas contraire, démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n) \ : \ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \ \text{ est vraie.}$$

— $\mathscr{P}(0)$ est trivialement vérifiée.
— Supposons $\mathscr{P}(n)$ vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x^k \\ &= x^{n+1} + \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(1-x)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$.
La propriété était initialisée et héréditaire, elle est vérifée sur $\mathbb{N}$. $\square$

Proposition II.10. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^k \, b^{n-k}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que :

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} &= a\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} - b\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a^k b^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k} \text{ par changement d'indice}\\ &= a^{n+1} - b^{n+1}\,.\end{aligned}$$

□

✌ **Remarque II.15.** La démonstration *supra* peut être vue comme un exemple de **somme télescopique**, *i.e* de somme dont les termes se compensent "deux à deux". Ces dernières sont, une fois leur structure repérée, aisées à calculer.

✍ **Exercice II.3.** Déterminer la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Binôme de Newton

Définition II.12. Soit $n \in \mathbb{N}$; on appelle **factorielle** de n l'entier $n!$ défini par récurrence de la façon suivante :
- $0! = 1$;
- si $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$.

✌ **Remarque II.16.** Il découle de la définition que

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k\,.$$

➠ **Exemple II.14.** $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $14! = 87178291200$, $42! = 1.405006117752879898543142606244511569936384.10^{51}$: la croissance est rapide !

Définition II.13. Soient $n, k \in \mathbb{N}$. On appelle **coefficient du binôme "k parmi n"** la quantité :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{sinon.}\end{cases}$$

✌ **Remarque II.17.** Cette quantité prendra tout son sens lorsque nous parlerons de combinatoire dans le chapitre XVI. Pour le moment, nous pouvons admettre qu'il s'agit du nombre de façons de choisir k éléments parmi n, sans ordre.

Proposition II.11. Soient $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. Alors :

(i)
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,,\ \binom{n}{1} = n\ ;$$

(ii)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(iii)
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \textbf{[identité de Pascal]}$$

Démonstration. Immédiat en passant par la définition. □

✌ **Remarque II.18.** Le point (iii)fait écho à une contruction probablement vue en terminale : le triangle de Pascal (Blaise de son prénom, 1623—1662).

$n\backslash k$	0	1	2	3	...
0	1	0	0	0	...
1	1	1	0	0	...
2	1	2	1	0	...
3	1	3	3	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Comme son nom ne l'indique pas, la formule qui suit apparaît dés le X^e siècle dans des traités de mathématiciens arabes, indiens ou perses (Al–Karaji, Halayudha). Elle fut également démontrée indépendamment par Yang Hui en Chine au XIII^e siècle Elle fut toutefois démontrée sous sa forme moderne et généralisée par Isaac Newton en 1665.

Théorème II.12 (Formule du binôme de Newton)**.**
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et soit $n \geq 0$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\ .$$

✌ **Remarque II.19.** L'addition étant commutative, les rôles de a et b sont interchangeables. Mettre ceci en parallèle avec l'égalité (ii) de la proposition II.11.

Démonstration. Devinez quoi...Une récurrence ! Plus précisément, démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n)\ :\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \ \text{ est vraie.}$$

— $\mathscr{P}(0)$ est trivialement vérifiée.

— Supposons $\mathscr{P}(n)$ vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} a^{k'}\, b^{n-k'+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&\text{via le changement d'indice } k = k'-1 \text{ dans la première somme} \\
&= \sum_{=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{=\binom{n+1}{k}} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

La propriété était initialisée et héréditaire, elle est vérifiée sur $\mathbb{N}$. □

➠ **Exemple II.15.** En appliquant cette formule, on obtient immédiatement les deux (forts utiles) formules suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0\ .$$

d) Sommes doubles

Fixons nous dans ce paragraphe deux familles $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_p$ de nombres réels (ou complexes). On a alors, en développant :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{p} b_\ell\right) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{\ell=0}^{p} b_\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{p} a_k b_\ell\ .
\end{aligned}$$

✖ **Attention :** On a bien ici une somme **double** rassemblant tous les produits possibles des a_k et b_ℓ. En **aucun cas** ne faut–il prétendre que le produit de ces deux sommes est la somme des $a_k b_k$. Le lecteur non suicidaire prendra de fait soin de ne pas utiliser le même indice pour les deux sommes...

✍ **Exercice II.4.** Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} k\ell^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} k\,.$$

Notation. On pose :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_i b_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_i b_j\,.$$

Une telle somme est dite **triangulaire**.

✖ **Attention :** Dans le cas d'une somme double (ou plus, si affinités), il est possible d'intervertir l'ordre des symboles $\sum$. Cela n'est **PAS** possible pour une somme triangulaire, car les bornes de la seconde somme dépendent de l'indice de la première.

✍ **Exercice II.5.** Calculer, pour $n \geq 0$, la somme $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

➥ **Correction :** *On a :*

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \left(\sum_{i=1}^{j} i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} \\
&= \frac{n(n+3)}{4}\,.
\end{aligned}$$

✌ **Remarque II.20.** Dans le cas où les a_i et b_j coïncident, on peut décomposer une somme triangulaire de cette façon :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i a_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}_{=D} + \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j}_{=S}$$

pour simplifier les calculs. En effet, avec ces notations, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = D + 2S\,.$$

✍ **Exercice II.6.** Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.