

Notions de logique

Ce qui suit a pour vocation d'introduire quelques concepts absolument fondamentaux sans lesquels faire des mathématiques serait bien difficile. Il n'est pas attendu une compréhension fine des théories sous-jacentes.

1. Propositions

a) C'est quoi ?

Définition 0.1. Une **assertion** est un énoncé, pouvant être vrai ou faux, mettant en relation des objets mathématiques.

▣ Exemple 0.1.

- " $2 + 2 = 12$ " est une assertion.
- "Toute suite convergente est bornée" également.

Convention. Une assertion est toujours vraie **ou** fausse, et jamais les deux à la fois.

Définition 0.2. Faire des mathématiques, c'est énoncer (et démontrer !) des assertions vraies, appelées **propositions**.

Définition 0.3. Un peu de vocabulaire, en vrac.

- Un **théorème** est une proposition importante.
- Un **lemme** est une proposition qui sert (dans le cadre où elle est énoncée) principalement à démontrer une autre proposition.
- Un **corollaire** est une proposition qui découle immédiatement d'une autre proposition.
- Un **axiome** est une assertion que l'on **décide** vraie.

Définition 0.4. On appelle **prédicat** d'une variable x toute assertion $P(x)$ dépendant de celle-ci.

b) Assertions équivalentes

Définition 0.5. Soient P et Q deux assertions. On dira que P et Q sont équivalentes si elles ont exactement les mêmes valeurs de vérité, c'est à dire si elles sont toutes deux vraies ou toutes deux fausses.

Notation. $P \Leftrightarrow Q$

▣► **Exemple 0.2.**

- $(1 = 0) \Leftrightarrow 2$ est impair.
- Si n est un entier, $(n \text{ est pair}) \Leftrightarrow (n + 1 \text{ est impair})$.

2. Connecteurs logiques

Les connecteurs jouent un rôle fondamental en logique puisqu'ils permettent de créer de nouvelles assertions à partir de assertions existantes (sans eux, les mathématiques seraient relativement bornées...).

a) Le connecteur "ET"

Définition 0.6. Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion " P et Q " comme étant vraie si et seulement si P et Q sont toutes deux vraies.

Notation. $P \wedge Q$

▣► **Exemple 0.3.**

- $(1 + 1 = 2) \wedge (2 + 1 = 3)$ est vraie.
- $(1 + 1 = 0) \wedge (2 + 1 = 3)$ est fausse.

Proposition 0.1. Soient P , Q et R des assertions. Alors :

- (i) $P \wedge P \Leftrightarrow P$ [idempotence];
- (ii) $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ [commutativité];
- (iii) $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ [associativité].

✂ **Remarque 0.1.** Le troisième point de cette assertion donne un sens à la notation $P \wedge Q \wedge R$ qui désigne arbitrairement $P \wedge (Q \wedge R)$ ou $(P \wedge Q) \wedge R$.

b) Le connecteur "OU"

Définition 0.7. Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion " P ou Q " comme étant vraie si et seulement si P est vraie et/ou Q est vraie.

Notation. $P \vee Q$.

☞ **Remarque 0.2.** On parle aussi de "OU inclusif", par opposition au "OU exclusif".

☛ **Exemple 0.4.** $(1 + 1 = 0) \vee (1 + 1 = 2)$ est vraie.

Proposition 0.2. Soient P , Q et R des assertions. Alors on a :

- (i) $P \vee P \Leftrightarrow P$;
- (ii) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$;
- (iii) $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$;
- (iv) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ [**distributivité**];
- (v) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ [**distributivité**].

☞ **Remarque 0.3.** Le troisième point de cette assertion donne un sens à la notation $P \vee Q \vee R$ qui désigne arbitrairement $P \vee (Q \vee R)$ ou $(P \vee Q) \vee R$.

c) Le connecteur "NON"

Définition 0.8. Soit P une assertion. On définit l'assertion "Non P " comme étant vraie si et seulement si P est fausse.

Notation. \bar{P}

Proposition 0.3. Soit P une assertion. Alors :

- (i) $\bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P$;
- (ii) $\overline{(P \wedge \bar{P})}$ est vraie [**non-contradiction**];
- (iii) $P \vee \bar{P}$ est vraie [**tiers exclus**].

Le théorème suivant est du à Augustus de Morgan (1806—1871), mathématicien et logicien britannique.

Théorème 0.4 (De Morgan).

Soient P et Q deux assertions. Alors :

- (i) $\overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$
- (ii) $\overline{P \wedge Q} = \bar{P} \vee \bar{Q}$

☛ **Exercice .1.** Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \otimes Q = (P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q)$ (ce nouveau connecteur est appelé "OU exclusif"). Dresser la table de vérité de \otimes .

d) Le connecteur "IMPLIQUE"

Définition 0.9. Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion " P implique Q " comme étant fausse si et seulement si P est vraie alors que Q est fausse.

Notation. $P \Rightarrow Q$

☞ **Remarque 0.4.** On notera que "faux" implique tout ce que l'on veut...

▣ **Exemple 0.5.**

- $(1 = 0) \Rightarrow$ (J'ai mangé une pomme hier à 21h)
- $(3 \text{ est pair}) \Rightarrow$ (2 est pair)
- Si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $(f \text{ est dérivable}) \Rightarrow$ (f est continue)

Proposition 0.5. Soient P , Q et R des assertions. Alors on a :

- (i) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ [Transitivité]
- (ii) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$
- (iii) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$
- (iv) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Rightarrow Q)$
- (v) $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$
- (vi) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ [Contraposée]
- (vii) $(\overline{P} \Rightarrow (Q \wedge \overline{Q})) \Rightarrow P$ [Démonstration par l'absurde]

3. Méthodes de démonstration

Énoncer des assertions, c'est bien. Les démontrer c'est mieux. Les démontrer proprement, c'est encore mieux ! Voici une sélection de quelques-unes des méthodes les plus usitées dans tous les domaines des mathématiques...

a) Comment démontrer que $P \Rightarrow Q$?

Cette méthode de démonstration est absolument primordiale. On voit trop souvent des rédactions du genre " $P \Rightarrow R \Rightarrow S \Rightarrow Q \Rightarrow$ ok"... La première règle à respecter lorsque l'on veut démontrer une implication est de **ne pas utiliser le symbole " \Rightarrow "** ! En effet, comme l'on vient de le voir, **celui-ci est un connecteur logique qui n'a absolument rien à voir avec le mot "donc"**. Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, le mieux est de suivre la méthode suivante :

1. Supposer que P est vraie.
2. Démontrer qu'alors Q est vraie.

Cette approche est en règle générale la seule valable...

Exemple "idiot" :

On veut démontrer " $(2 + 3 = 6) \Rightarrow$ (16 est un carré parfait)".

1. Supposons que $2+3 = 6$.

2. $16 = 4 \times 4$ donc 16 est un carré parfait. D'où le résultat.

Cet exemple n'a aucun intérêt mathématique étant donné que l'on a pas fait usage de l'hypothèse (qui par ailleurs a la fâcheuse propriété d'être fausse...) ! Lorsque l'on arrive à démontrer que $P \Rightarrow Q$ sans avoir utilisé la véracité de P , c'est que l'on a fort vraisemblablement commis une erreur...

b) Comment démontrer que $P \Leftrightarrow Q$?

Pour démontrer une équivalence, il faut et il suffit de montrer deux implications. Ainsi, on procède en 2 temps :

1. On montre que $P \Rightarrow Q$.
2. On montre que $Q \Rightarrow P$.

Ce type de rédaction a l'immense avantage d'être bien moins "casse-gueule" que les suites (plus ou moins logiques, hélas...) de symboles " \Leftrightarrow ".

c) Comment démontrer que $P \vee Q$?

Sur le papier, ce genre de choses est excessivement simple. En pratique, il donne lieu à des raisonnements souvent assez brouillons. La meilleure méthode pour démontrer ce genre d'assertion est de procéder de la façon suivante : comme on a vu que $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Rightarrow Q)$, démontrer une assertion du type "soit P , soit Q " peut se faire en suivant ce plan :

1. Supposer que P est fausse.
2. Montrer qu'alors Q est vraie.

✎ **Exercice .2.** Soit $x \in [0, 1[$ démontrer que :

$$(x = 0) \vee ((x > 0) \wedge (x < 1)).$$

d) Comment démontrer que $P \wedge Q$?

Lorsque l'on doit démontrer " P et Q ", le mieux reste encore... de démontrer P et de démontrer Q ! Attention cependant à bien séparer les deux démonstrations, il ne s'agit pas de montrer $P \Rightarrow Q$...

e) Contraposée

Comme $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$, il est possible de démontrer $P \Rightarrow Q$ en démontrant $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.


✎ **Exercice .3.** Démontrer que si a est un nombre réel tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leq \varepsilon$$

alors a est nécessairement nul.

f) Démonstration par l'absurde


On a vu que $(\overline{P} \Rightarrow (Q \wedge \overline{Q})) \Rightarrow P$. Ainsi, si on suppose "Non P " et que l'on aboutit à une contradiction, alors P est vraie. Il est recommandé de ne pas abuser de cette méthode.

 **Exercice .4.** Démontrer qu'un nombre entier ne peut être à la fois pair et impair.

g) Démonstration par analyse–synthèse

Lorsque l'on se retrouve face à une question ouverte, il peut être intéressant de supposer trouvée une solution au problème pour en déduire des conditions nécessaires dessus (l'analyse), avant de vérifier qu'elles sont suffisantes (la synthèse).

La partie analyse assure l'unicité du ou des objets étudiés, la synthèse en démontre (ou pas, auquel cas on peut basculer sur une démonstration par l'absurde à peu de frais) l'existence.

 **Exercice .5.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer qu'il existe une unique écriture de f comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.