

# Algorithmes dichotomiques

## 1 Recherche dichotomique

On a vu (TP recherche séquentielle) que rechercher un élément d'une liste nécessite dans le pire cas de la parcourir entièrement, pour un coût proportionnel à  $n$  (taille de la liste). Mais on peut faire beaucoup mieux si la liste est **triée**, en appliquant un algorithme de recherche dichotomique : à chaque itération, on élimine la *moitié* des éléments parmi lesquels on cherche l'élément à trouver (s'inspirer de la méthode dichotomique de calcul d'une approximation de la racine de l'équation  $f(x) = 0$  sur un intervalle  $]a, b[$ ).

Comme la fonction `search(e1:int, li:[int])->int` écrite dans le TP recherche séquentielle, la fonction `dicho_search(e1:int, li:[int])->int` doit retourner l'indice de l'élément s'il est présent dans la liste, et `None` sinon.

**Exemple.** `dicho_search(3, [1, 2, 3, 4, 5])` doit retourner 2 et `dicho_search(7, [1, 2, 3, 4, 5])` doit retourner `None`.

**Question 1.** *Écrire la fonction `dicho_search` et faire les tests ci-dessus pour vérifier qu'elle est correcte. Quel est la complexité de cette fonction ?*

**Question 2. BONUS (à faire à la fin) :** *écrire une version récursive de la fonction `dicho_search`.*

## 2 Exponentiation rapide

On peut bien entendu voir le calcul de  $a^n$  comme un produit :

$$a^n = a \times a \times \dots \times a$$

**Question 3.** *Écrire une première fonction `exp(a:int, n:int)->int` qui retourne le calcul de  $a^n$  par la méthode suggérée ci-dessus. Quel est la complexité de cette fonction ?*

Mais on peut aussi faire mieux en appliquant une méthode dichotomique, qu'on appelle *exponentiation rapide*.

**Question 4.** *Supposons d'abord que  $n$  est pair et qu'on sait calculer  $a^{n/2}$ . Comment en déduire  $a^n$  ? Même question si  $n$  est impair. Quel est le cas d'arrêt de cette définition récursive ?*

**Question 5.** *En déduire une fonction récursive `exp_rapide(a:int, n:int)->int` qui retourne  $a^n$  par une méthode dichotomique.*

**Exemple.** `exp_rapide(3, 7)` doit retourner 2187.

**Question 6.** *Pour  $n = 10^{10}$ , calculer le nombre de multiplications nécessaires pour calculer  $a^n$  par cette méthode.*